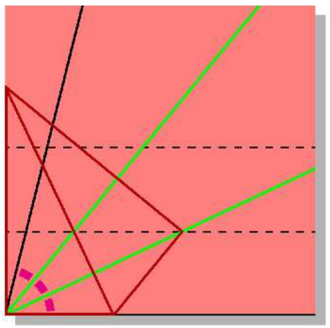
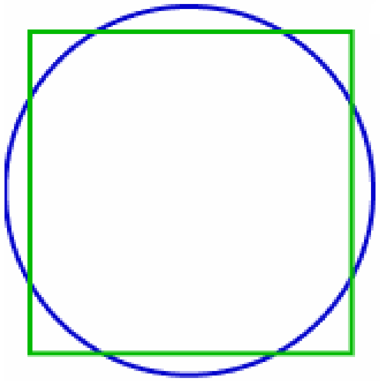
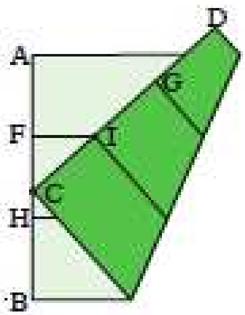
Problemi risolubili e non risolubili con riga e compasso





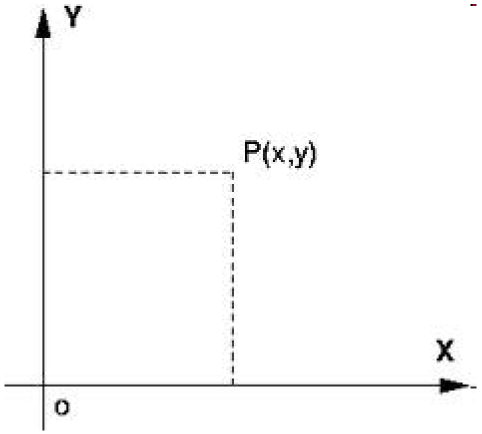


Risolubilità di un problema geometrico

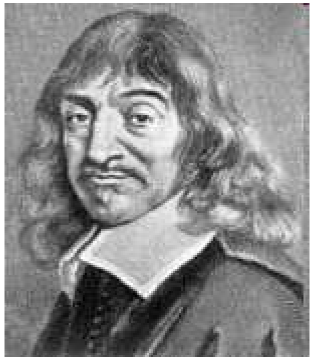
Risolvere un problema geometrico significa trovare alcune grandezze incognite in funzione di certe altre grandezze note.

Questo dipende, oltre che dalla natura del problema, anche dagli strumenti che si è disposti ad utilizzare.

I greci affrontano il problema geometrico ricercando la soluzione attraverso un procedimento costruttivo e limitando gli strumenti alla sola riga e al compasso.



Da Cartesio in poi si utilizzano anche gli strumenti algebrici.



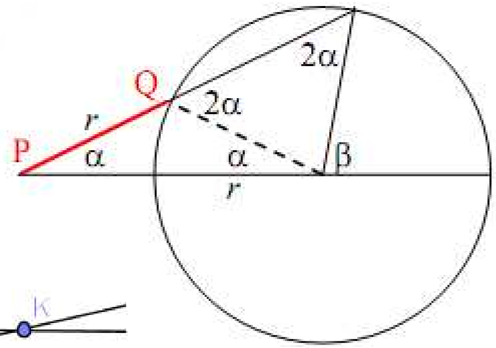
Le costruzioni ammissibili per i greci

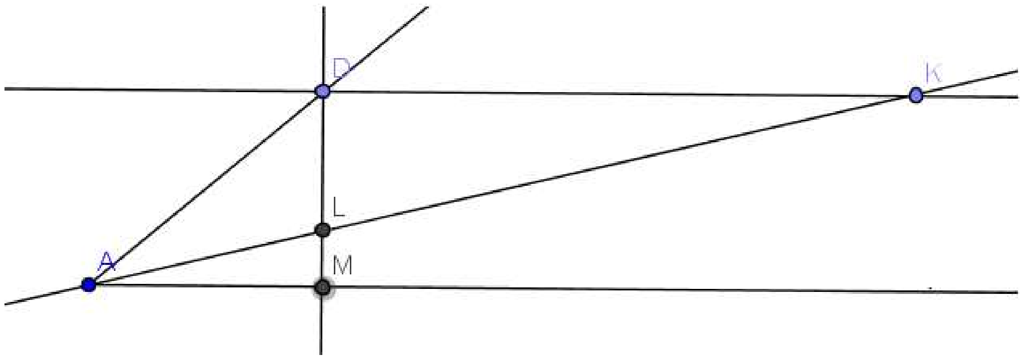
Euclide detta le regole attraverso i primi tre postulati:

- esiste un segmento congiungente due punti dati
- un segmento si può estendere indefinitamente
- esiste un cerchio di centro e raggio dati

che impongono l’utilizzo della riga infinita non graduata e il compasso collassabile con apertura qualunque.

A proposito dell'uso della riga….
La trisezione dell'angolo di Archimede e Nicomede





Nelle costruzioni è stata rispettato l'uso euclideo della riga?

Cosa vuol dire risolubile con riga e compasso?

Con questa espressione si intende risolvere un problema geometrico utilizzando una sequenza finita di operazioni che rientrano tra le seguenti:

1) tracciare una retta per due punti assegnati;
2) costruire una circonferenza di centro e raggio fissati;
3) intersecare due rette;
4) intersecare due circonferenze;
5) intersecare una retta e una circonferenza.

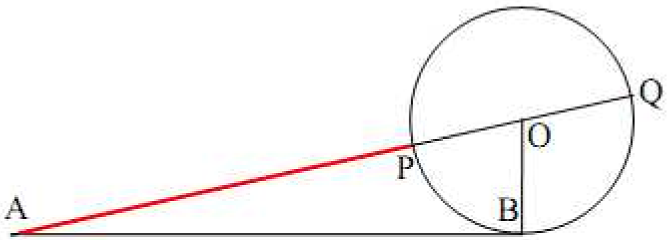
Esempio di problemi risolti con riga e compasso

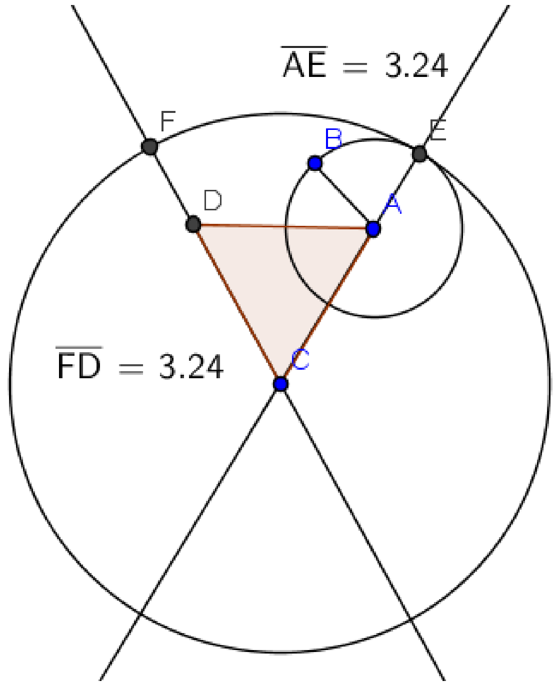
La costruzione della radice positiva dell'equazione:

$$x^2+ax-b^2 = 0$$

tratta dalla *Geometria* di Cartesio (1637).

Trasporto di un segmento (Elementi VI-III sec ac)





Ma alcuni problemi ……

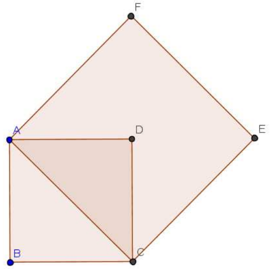
Già i greci si accorsero che alcuni problemi erano refrattari ad essere risolti con la sola riga e compasso …

Duplicazione del cubo

La trisezione dell’angolo

Quadratura del cerchio

La costruzione dell’ettagono regolare

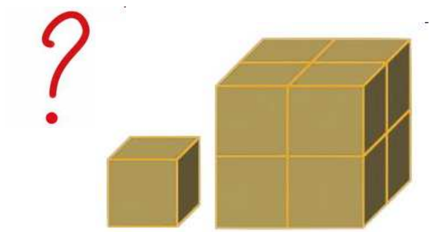


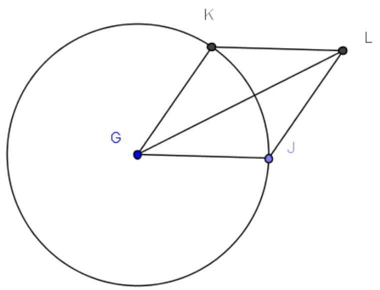
Duplicazione del cubo

Il problema consiste nel trovare il lato di un cubo avente volume doppio di un cubo di lato assegnato.

Tale problema è la naturale generalizzazione della duplicazione del quadrato.

Apollo, al quale nell’isola di Delo era stato dedicato un altare a forma cubica, annunciò ai Deliani che, per liberarsi dall’epidemia che li affliggeva, avrebbero dovuto **costruire un altare doppio** di quello esistente, **mantenendone** tuttavia **la forma**.



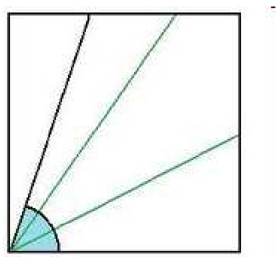


Trisezione dell’angolo

Il problema consiste nel determinare un angolo che sia la terza parte di una angolo assegnato.

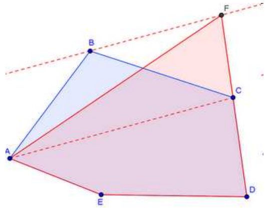
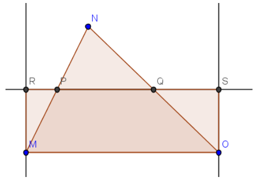
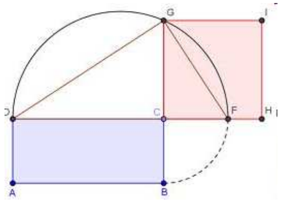
E’ in questo senso la naturale generalizzazione della bisezione dell’angolo.

Il problema probabilmente nasce per costruire poligoni regolari i cui lati siano multipli di 9. Infatti Archimede (Siracusa 287 a.C., Siracusa 212 a.C.) determinò l’approssimazione di π proprio partendo da un triangolo equilatero e raddoppiandone i lati inscrivendo e circoscrivendo poligoni di 96 lati. Trisecando l’angolo quindi si poteva passare dal triangolo al poligono di 9 lati, di 27 e così via.



Quadratura del cerchio

Il problema consiste nel determinare il lato di un quadrato avente la stessa area di un cerchio assegnato, il che equivale a costruire un segmento di lunghezza π.

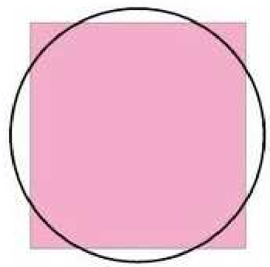




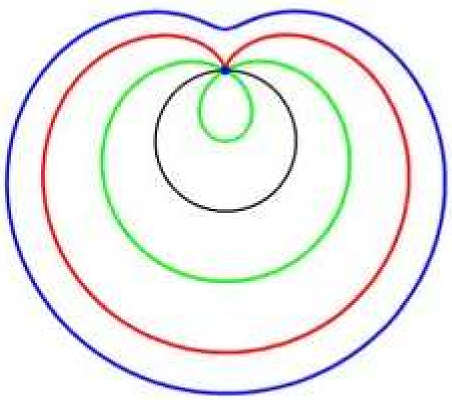
E' una generalizzazione del problema della quadratura di un poligono e alla costruzione di poligoni regolari inscritti e circoscritti ad un cerchio per il calcolo di π.

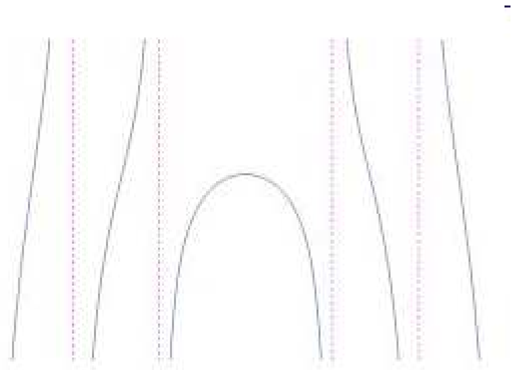
Tale problema è divenuto così importante da essere entrato nei modi di dire per esprimere la miracolosa soluzione di un problema, tanto miracolosa che non si riesce mai ad ottenerla.

Qual è 'l geomètra che tutto s'affige
per misurar lo cerchio, e non ritrova,
pensando, quel principio ond' elli indige,
tal era io a quella vista nova:
veder voleva come si convenne
l'imago al cerchio e come vi s'indova;
ma non eran da ciò le proprie penne:

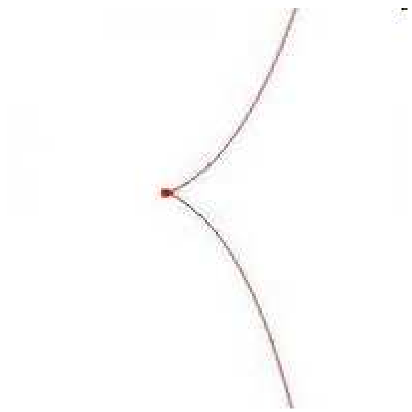
(Dante, Divina Commedia, Paradiso, Canto XXXIII, vv 133-139)

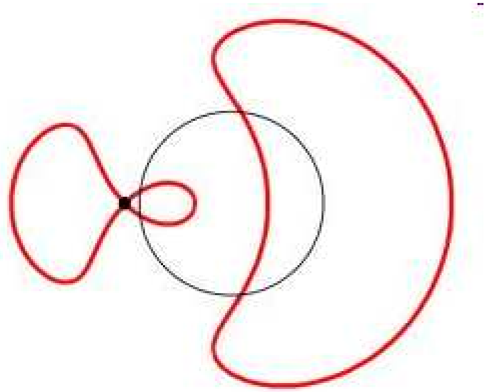






Risolviamo i problemi senza uso della riga e del compasso
Le curve celebri

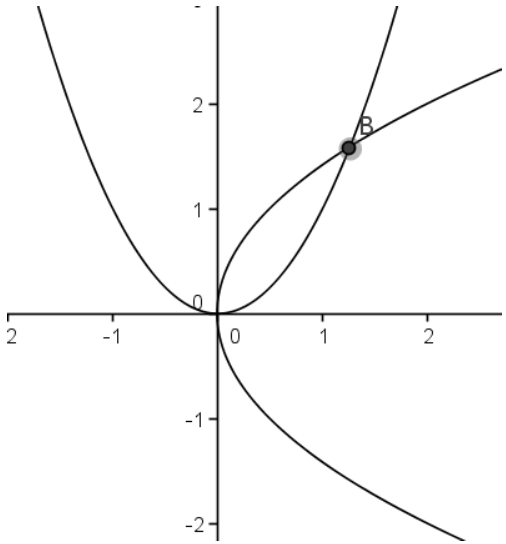




Duplicazione del cubo

Dato un cubo di lato a, si possono intersecare le parabole $x^2=ay$ e $y^2=2ax$. Il punto di intersezione avrà per ascissa il valore cercato, ossia $x^3=2a^3$.

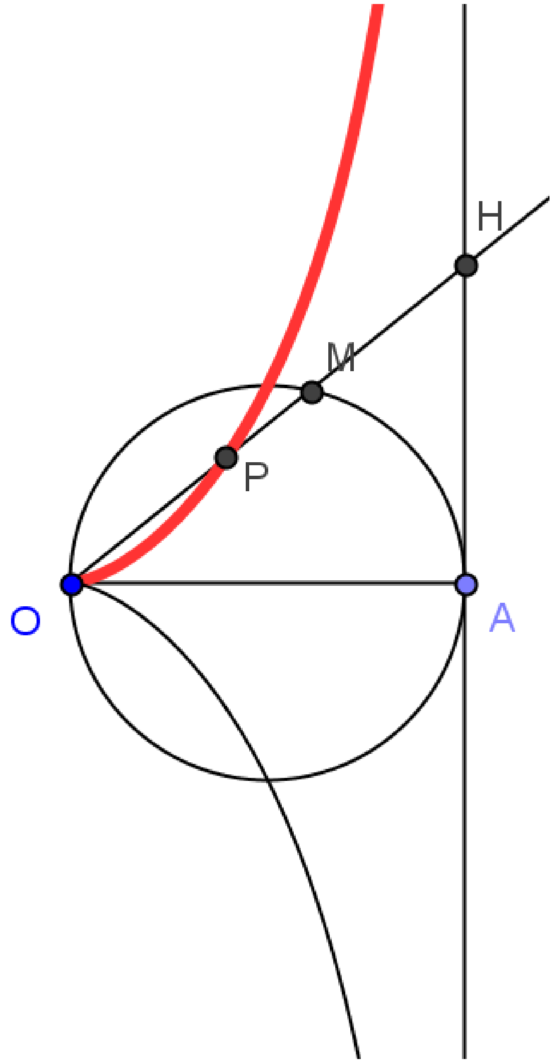
(soluzione dovuta a Menecmo, allievo di Pitagora, IV secolo AC)



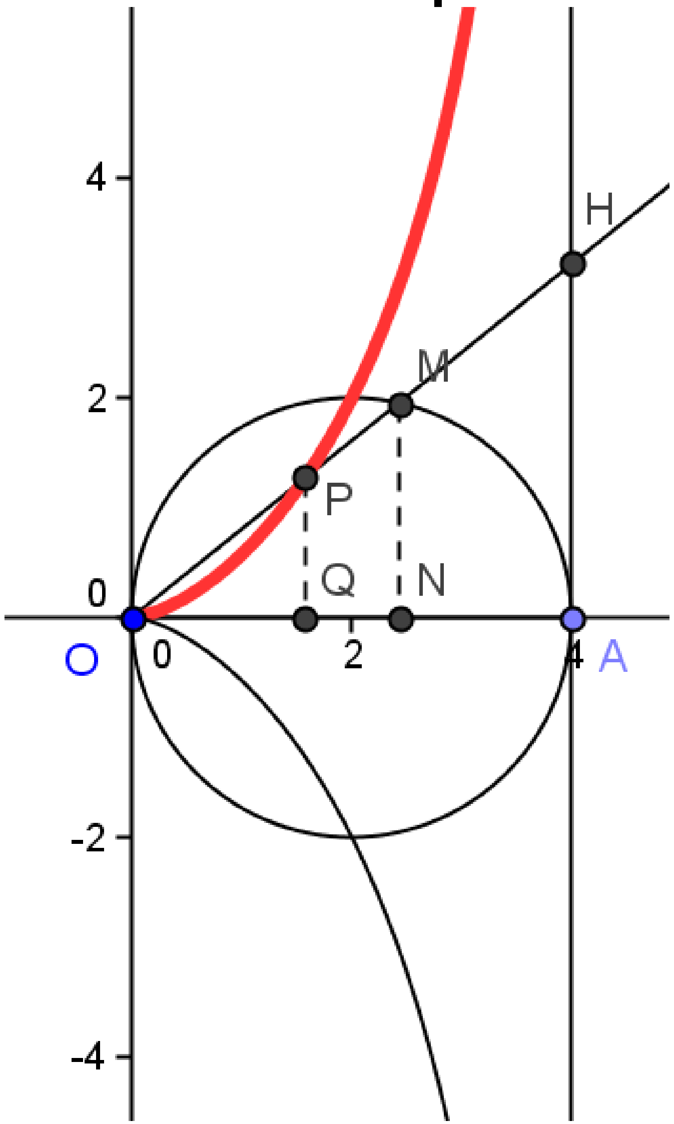
Risoluzione duplicazione del cubo
La cissoide di Diocle (Karisto 240 a.C. - Eubea 180 a.C.)

Si consideri una circonferenza di diametro OA ed t tangente *in A*. Si tracci la retta OM*, con M punto della circonferenza, e sia H* il suo punto d'intersezione con *t*. Si segni il punto *P* del segmento *OM* tale che *OP = MH.* Al variare del punto *M* sulla circonferenza il punto *P* descrive la cissoide.

Il punto *O* è detto *polo* e t *base* della cissoide.



Equazione della cissoide



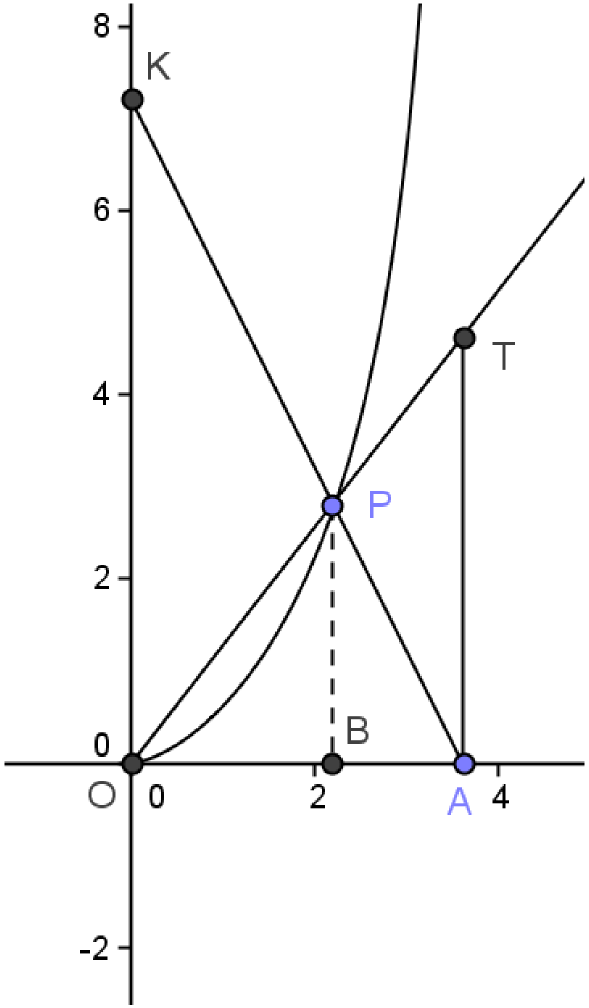
$$y = \pm\sqrt{\frac{x^3}{a-x}}$$

in coordinate cartesiane

$$\rho = a\frac{sen^2\omega}{\cos\omega}$$

in coordinate polari

Perché la cissoide risolve il problema della duplicazione del cubo



Sia a=OA il lato del cubo da duplicare e K il punto dell'asse y tale che OK=2a. Congiunto K con A, il segmento KA interseca la cissoide in P e la retta OP interseca la tangente t in T.

Il segmento AT è il lato del cubo di volume doppio rispetto a quello di lato a.

I problemi classici nei temi di maturità

Dalla maturità del 2010

PROBLEMA 2

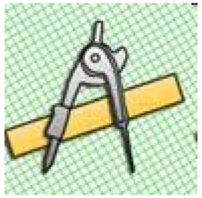
Nel piano riferito ad un sistema Oxy di coordinate cartesiane siano assegnate le parabole d'equazioni: $y^2 = 2x$ e $x^2 = y$.

a) Si disegnino le due parabole e se ne determinino le coordinate dei fuochi e le equazioni delle rispettive rette direttrici. Si denoti con A il punto d'intersezione delle due parabole diverso dall'origine O.

b) L'ascissa di A è $\sqrt[3]{2}$; si dica a quale problema classico dell'antichità è legato tale numero e, mediante l'applicazione di un metodo iterativo di calcolo, se ne trovi il valore approssimato a meno di 10^{-2}.

Dalla maturità del 2011 (q8)

In che cosa consiste il problema della *quadratura del cerchio*? Perchè è così spesso citato?

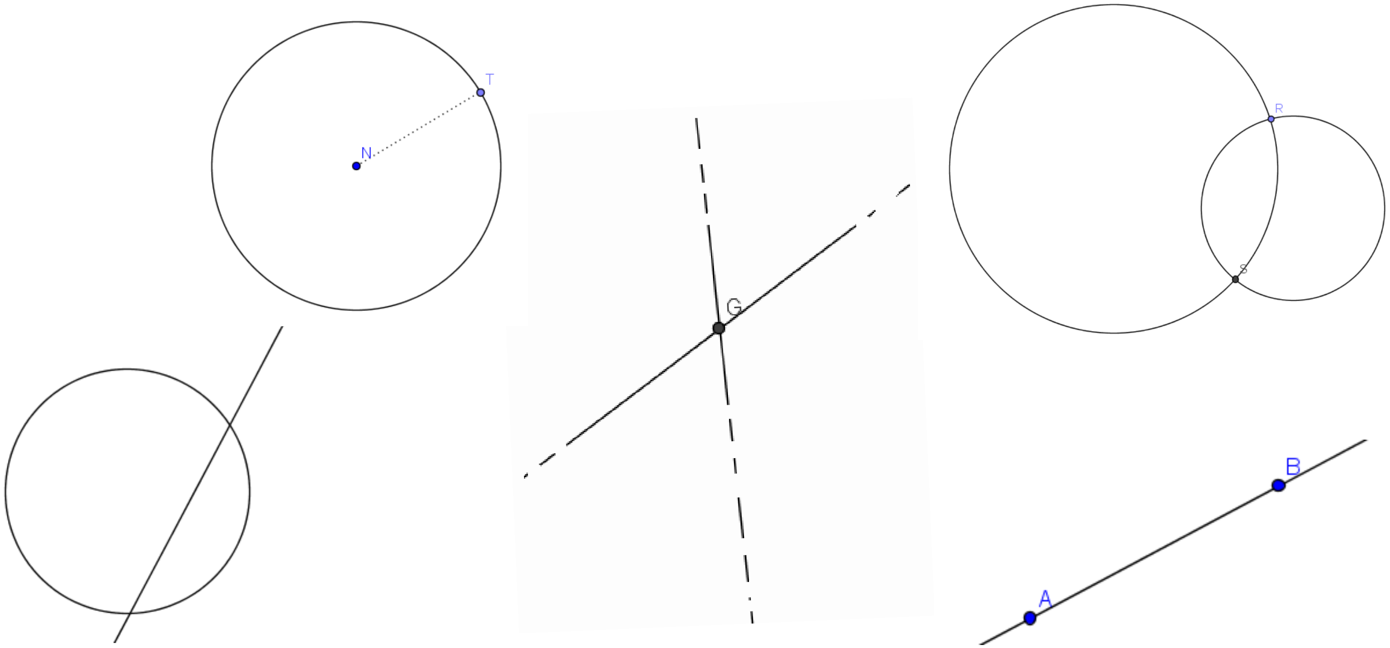


Perché impossibili con riga e compasso?

La vera domanda interessante è la seguente: **perché non riusciamo a costruire i segmenti che cerchiamo, usando riga e compasso?** Non siamo abbastanza bravi (e questo succede abbastanza frequentemente) o non è possibile? Come possiamo dimostrare l'impossibilità delle costruzioni richieste?

Addentriamoci nel problema della costruibilità con riga e compasso

Un segmento si dice costruibile con riga e compasso se è il risultato di un processo che coinvolge una delle 5 operazioni qui illustrate.



I numeri costruibili

Un numero reale a è costruibile con riga e compasso se lo è un segmento di lunghezza pari a |a| (avendo fissato un segmento di lunghezza unitaria).

I numeri interi sono costruibili con riga e compasso.

Fissiamo un segmento U come unità di misura. A partire da U possiamo costruire un qualsiasi numero naturale n (basta riportare il segmento n volte su una retta) e quindi un qualunque numero intero.

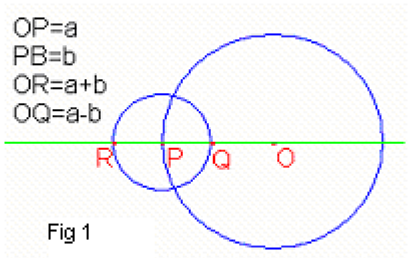
I numeri razionali sono costruibili con riga e compasso

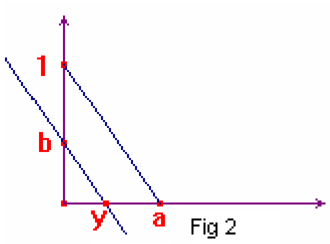
basta riportare su una retta a partire da un punto O m volte il segmento U ed dividere il segmento ottenuto in n parti uguali applicando il teorema di Talete.

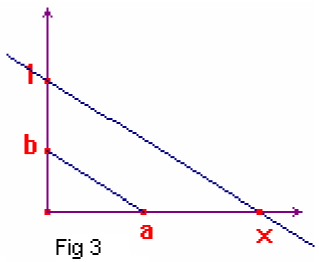
Sono inoltre costruibili:

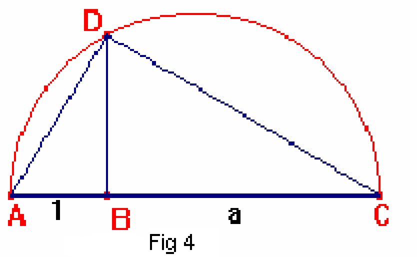
-la somma e la differenza di due numeri costruibili a e b (fig1)

- il prodotto di due numeri a·b (fig.2)
- il quoziente di due numeri a/b (fig. 3)
- la radice di un numero costruibile (fig. 4)









L’insieme dei numeri costruibili è un campo

La struttura algebrica (Q,+,*) ossia l’insieme dei numeri razionali con le usuali operazioni di somma e prodotto è un gruppo commutativo e il prodotto è distributivo rispetto alla somma.

Fissato ora c_0 in Q=C_0 e supposto c_0>0 e $\sqrt{c_0} \notin Q$

posso costruire con riga e compasso tutti i numeri del tipo

$$a + b\sqrt{c_0} \quad a, b, c_0 \in C_0 \quad \sqrt{c_0} \notin C_0$$

Il nuovo insieme di numeri C_1 è ancora un campo di numeri costruibili. Iterando il procedimento descritto si generano i campi C_h, al variare di h in N.

$$Q = C_0 \subset C_1 \subset ... \subset C_h$$

Esiste un numero intero h tale che l'estensione coincida con R?

NO

Infatti:

$$\sqrt[3]{2} \notin Q$$

e inoltre si può provare, per assurdo, che non esiste nessun valore di h intero tale che C_h che possa contenere tale valore.
Dunque ho dimostrato che il problema della duplicazione del cubo non è risolubile poiché

$$\sqrt[3]{2}$$

non è costruibile con riga e compasso.

Un numero reale o complesso si dice algebrico se è soluzione di un'equazione algebrica di grado n a coefficienti razionali.

Un numero che non sia algebrico si dice trascendente.

Posso dunque concludere che:

- Ogni numero costruibile si ottiene dai numeri razionali operando su essi con le 4 operazioni e l'estrazione di radice quadrata.
- Ogni numero costruibile è soluzione di una equazione algebrica a coefficienti razionali avente per grado una potenza del 2.
- Ogni numero costruibile è pertanto algebrico, mentre non è certamente vero il viceversa.
- Un numero trascendente non può essere costruibile.

- Con quanto dichiarato posso concludere che anche il problema della quadratura del cerchio non può essere risolto con riga e compasso. Infatti:
- π è trascendente. Tale risultato lo si deve al matematico Ferdinand von Lindemann che nel 1882, sulla base dei risultati di Hermite sulla trascendenza del numero e, pone fine alla questione.

Vale il seguente teorema:

Se un’equazione cubica non ammette radici razionali, allora nessuna delle sue radici è un numero costruibile partendo dal campo dei numeri razionali.

Abbiamo dunque raggiunto il seguente risultato:

Una costruzione con riga e compasso è impossibile se l’equivalente algebrico del problema è soluzione di un’equazione di terzo grado priva di radici razionali.

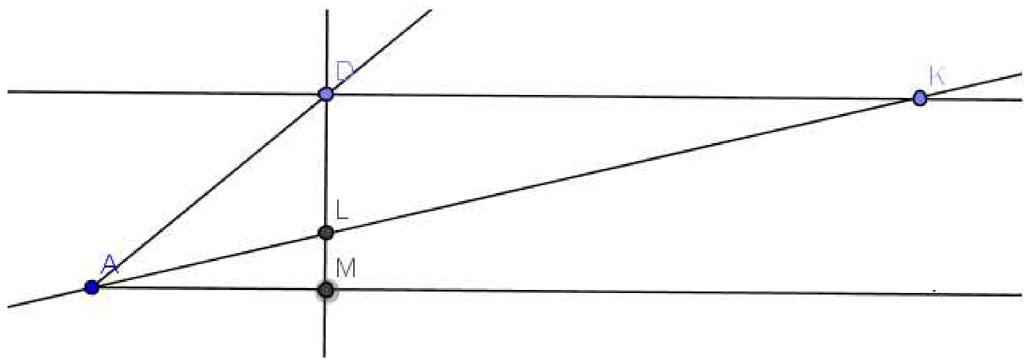
Faremo vedere che l'equazione che risolve il problema della trisezione dell'angolo è un'equazione di terzo grado irriducibile in Q.

Consideriamo un angolo α dato attraverso il suo coseno, $\cos\alpha$. Il problema equivale a determinare $x=\cos(\alpha/3)$. Dalla formula di triplicazione

$$\cos\alpha = 4\cos^3(\alpha/3)-3\cos(\alpha/3)$$

si ottiene

$$\cos\alpha = 4x^3-3x$$



Dunque il problema della trisezione dell'angolo è equivalente al problema algebrico del determinare una soluzione costruibile dell'equazione cubica precedente. In generale ciò non è vero, infatti

Teorema di Wanzel: L'angolo di 60° non è trisecabile.

Infatti se α=60° e l'equazione cosα = $4x^3-3x$ diventa

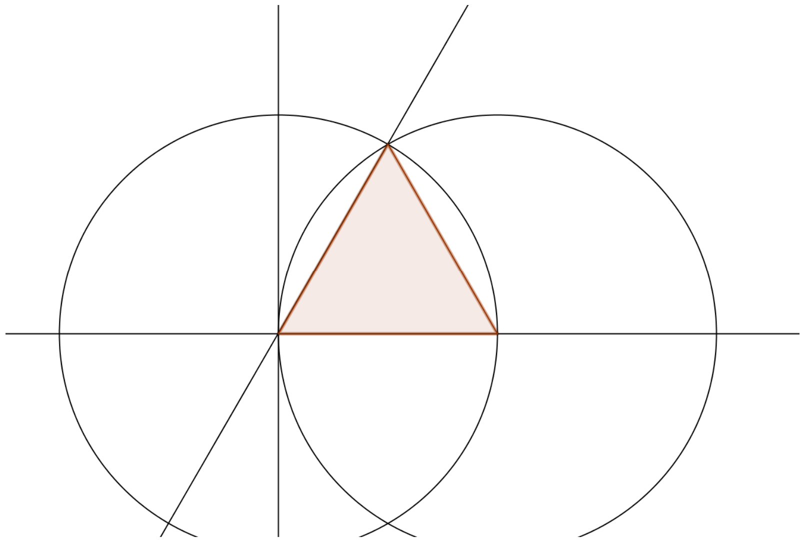
$$1/2 = 4x^3-3x$$

$$8x^3-6x-1=0$$

L'equazione non ammette radici razionali e quindi il problema di trisecare l'angolo di 60° non è risolvibile con riga e compasso.

Il problema della trisezione dell’angolo è diverso dagli altri poiché nessun cerchio è quadrabile come nessun cubo è duplicabile ma alcuni angoli sono invece trisecabili con riga e compasso.

Ad esempio è trisecabile l’angolo retto:



Quello che però ha in comune con gli altri problemi è la sua impossibilità che dipende in sostanza dalla natura algebrica e non geometrica del problema.

Grazie per l'attenzione.