

M

EUCLIDE

W

EUCLIDE

LE GEOMETRIE NON-EUCLIDEE

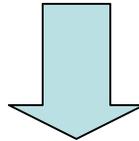
*Seminario di approfondimento per le
classi quinte della sezione scientifica
a.s. 2008-2009 profssa L. Giovannoni*

La matematica come scienza nasce nella Grecia classica

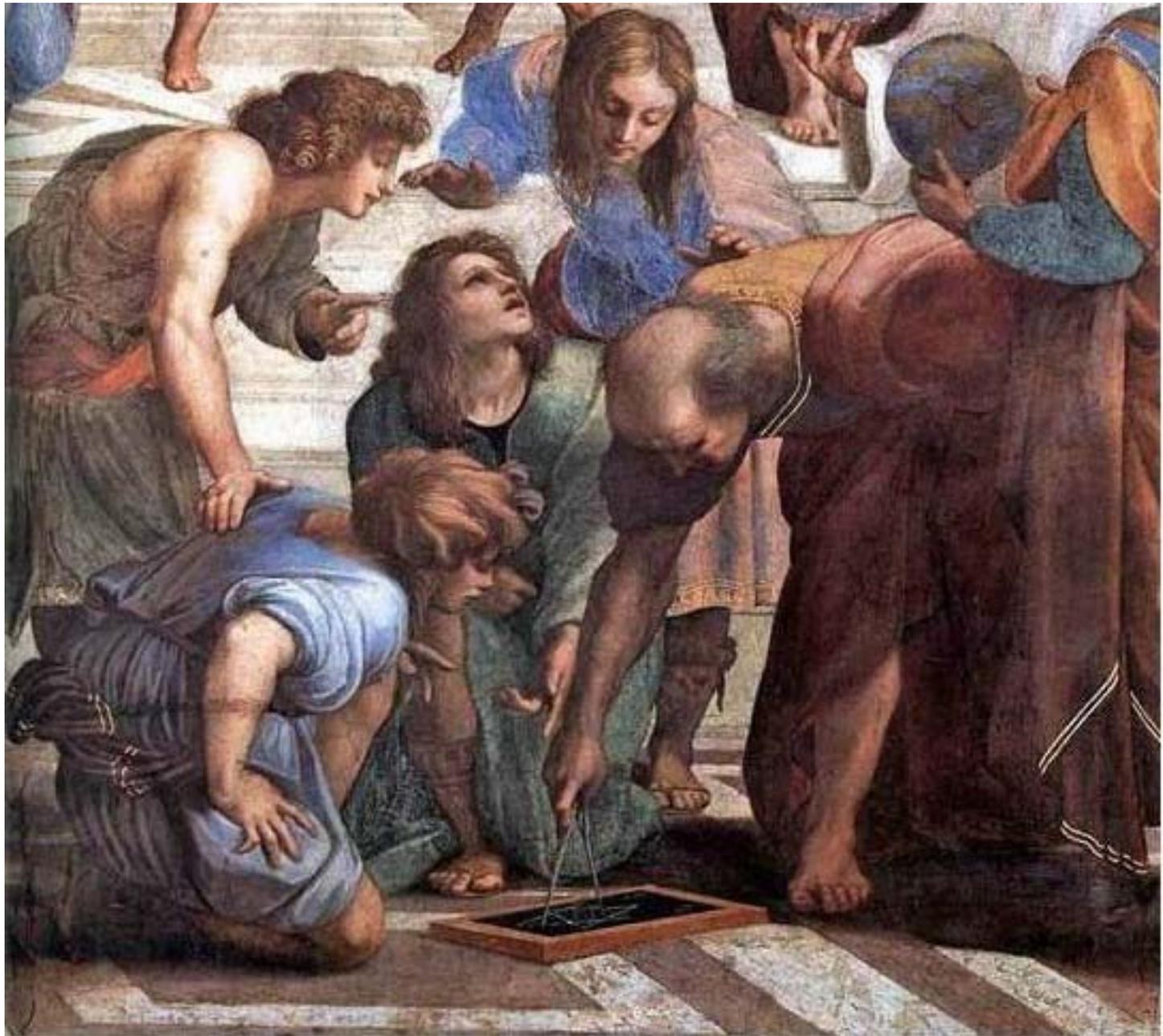
Gusto per l'armonia della natura e del ragionamento

Ricerca dell'equilibrio e della proporzione

Fiducia "utopistica" che il numero sia la chiave per leggere l'intero universo



Matematica come disciplina
astratta e deduttiva



GLI *ELEMENTI* DI EUCLIDE DI ALESSANDRIA

Quando: ai tempi della disgregazione dell'impero di Alessandro Magno

Dove: Alessandria d'Egitto

Sponsor: Tolomeo Sotere, governa l'Egitto dal 323 al 285 a.C.

L'OPERA: 13 libri, enciclopedia dello scibile matematico dell'epoca; rivoluzionaria per l'impostazione



ASSIOMI E POSTULATI

I postulati di Euclide (α ι τ ή μ α τ α)

Si domanda che

da qualsiasi punto si possa condurre un segmento ad ogni altro punto

e che ogni segmento determinato si possa prolungare continuamente per diritto

e che con ogni centro e ogni distanza si possa descrivere un circolo

e che tutti gli angoli retti siano uguali tra loro

e che *se un segmento incontrandone altri due , forma angoli interni da una stessa parte minori di due retti, i due segmenti prolungati indefinitamente si incontrano, dalla stessa parte in cui sono i due angoli minori di due retti*

Una retta prosegue fino all'infinito?



Ci sono rette che non condividono punti all'infinito?

Verità evidente e condivisibile ?

Al di là di ogni ragionevole dubbio?

L'infinito nel pensiero greco dell'antichità significa qualche cosa di indecifrabile, di indeterminato, di incontrollabile .

Come si fa a decifrare e a controllare quel che le rette fanno accostandosi all'infinito?



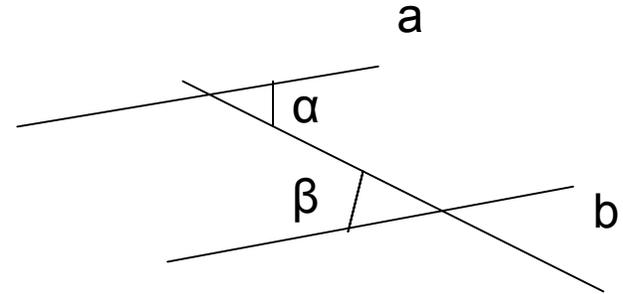
Euclide forse è il primo non euclideo!

Euclide propone già quali risultati si possono ottenere **indipendentemente dal “V postulato”**

- *Proprietà di esistenza e unicità della retta perpendicolare per un punto ad una retta data*

- *Criteri di uguaglianza tra triangoli*

- *Taluni teoremi sulla somma degli angoli di un triangolo:*
**PRIMO TEOREMA
DELL'ANGOLO ESTERNO**



27° proposizione

se $\alpha = \beta$ allora $a \parallel b$

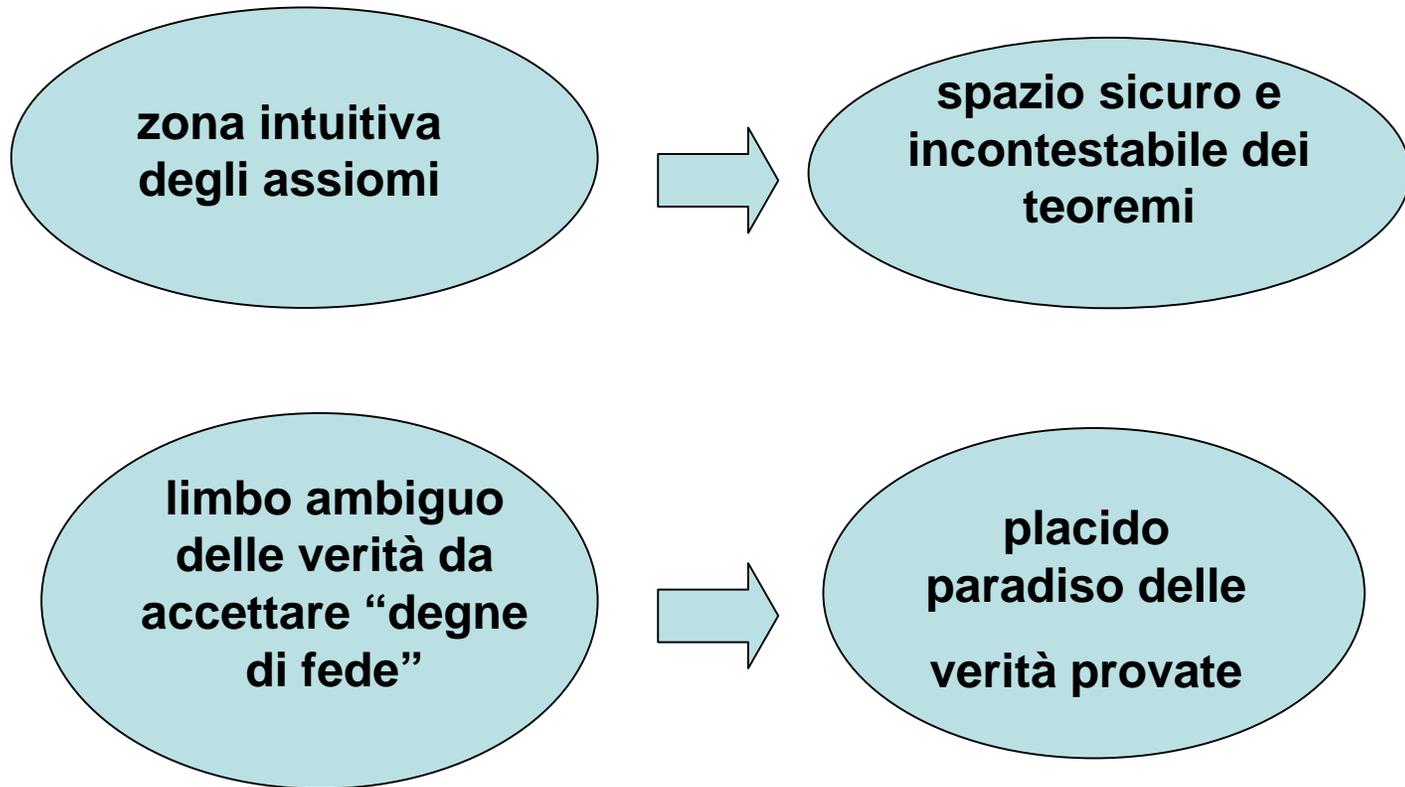
viene dimostrata senza usare il postulato 5

29° proposizione

se $a \parallel b$ allora $\alpha = \beta$

la dimostrazione richiede l'uso del postulato 5

Come si fa a rinnegare e a contraddire il V postulato sul quale si basa la teoria della similitudine, della proporzione, della riduzione in scala, irrinunciabile punto di riferimento?



Per evitare ogni dubbio la strada maestra è DIMOSTRARLO!

L'indipendenza del V postulato

Nei secoli successivi alla redazione dell'opera euclidea ci furono molti

tentativi di “dimostrazione del V postulato”,

di trasformare cioè il V postulato in un teorema deducibile dagli altri postulati

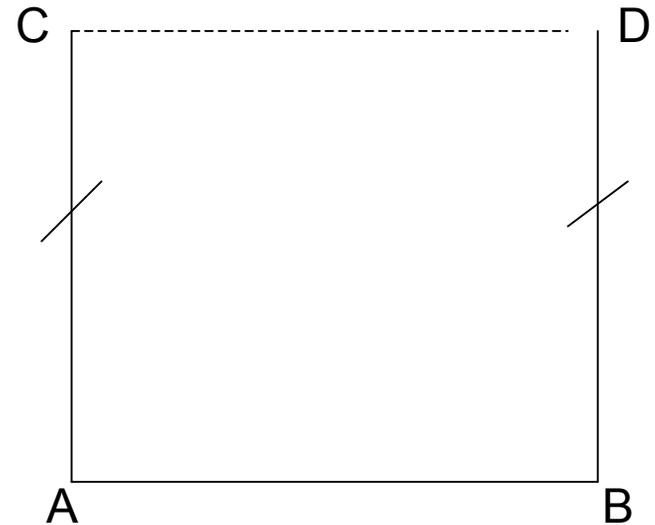
(la sua indipendenza è dimostrata da Cayley (1859) e da [Klein](#) (1872))

SONO DEGNI DI MENZIONE:

- Proclo (Commento al primo libro di Euclide) ricorda **Posidonio** (135 a . C. 51 a . C. circa)
rette equidistanti
- Gli arabi **Al-Nairizi** (IX-X sec) e **Nasir-Ed-Din** (1201-1274)
- **P. Cataldi** (1552-1626) ; **G. Vitale** (1633-1711); e altri...
- **J. Wallis** (1617-1703)
figure simili di grandezza arbitraria
- **Girolamo Saccheri** (1667-1733),
Euclides ab omni naevo vindicatus pubblicata a Milano nel 1733
- **J. H. Lambert** (1728-1777),
Theorie der Parallelinien, 1776, pubblicato nel 1786

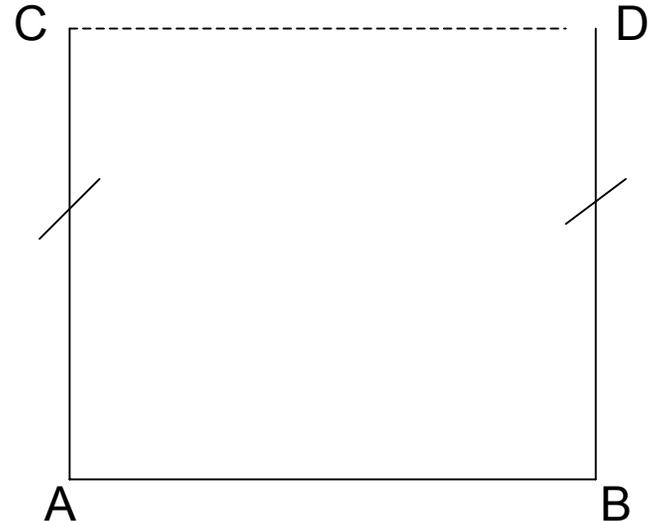
IL QUADRILATERO DI SACCHERI

- Si dice quadrilatero birettangolo isoscele un quadrilatero avente due lati opposti congruenti e perpendicolari ad uno degli altri lati
- Saccheri dimostra che **gli angoli in C e in D sono congruenti e** per quanto riguarda la loro ampiezza esamina tre possibilità:



Le tre ipotesi di Saccheri

- **Ipotesi dell'angolo retto:**
sono entrambi retticiò
equivale all'accettazione del V
postulato di Euclide
- **Ipotesi dell'angolo ottuso:**
sono entrambi ottusi ciò
equivale a negare il V
postulato di Euclide
- **Ipotesi dell'angolo acuto:**
sono entrambi acuticiò
equivale a negare il V
postulato di Euclide



Adrien Marie Legendre (1753-1833), nel **1794** pubblica ***Eléments de géométrie***, uno dei più diffusi manuali di geometria fra il XVII ed il XIX secolo; riprende sostanzialmente le idee di Saccheri.

- L'ipotesi dell'angolo retto equivale ad affermare che **la somma degli angoli interni di un triangolo è l'angolo piatto**
- L'ipotesi dell'angolo acuto equivale ad affermare che **la somma degli angoli interni di un triangolo è minore dell'angolo piatto**
- L'ipotesi dell'angolo ottuso equivale ad affermare che **la somma degli angoli interni di un triangolo è maggiore dell'angolo piatto**



QUALE SARÀ LA GEOMETRIA “GIUSTA”?

**Le conclusioni audaci e temerarie “ripugnano”
l’intuizione(vedi Kant!)**

Si potrebbe pensare ad una verifica empirica

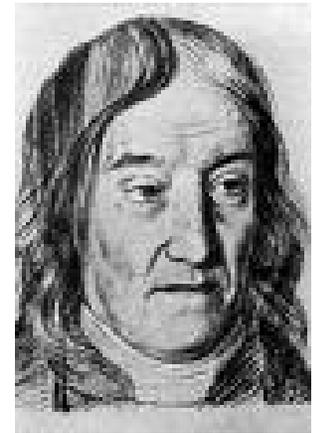
Gauss prova a misurare triangoli con vertici lontani
(cime di monti, stelle)

Lagrange pensa ad una “*geometria astrale*”
ma dice

Il faut que je étude encore!

..... bisogna che studi ancora ...

D'improvviso sorsero geometrie nuove



«...c'è qualche verità in ciò, che parecchie cose hanno una stagione nella quale esse sono trovate nello stesso tempo in più luoghi, precisamente come le violette vengono da ogni parte alla luce in primavera ...»

papà Farkas Bolyai al figlio Janos

La nascita delle cosiddette geometrie-non euclidee , all'inizio del secolo XIX , vide come protagonisti

- **Carl Friedrich Gauss** (1777-1855)
- **Janos Bolyai** (1802-1860)
- **Nikolaj Ivanovic Lobacewskij** (1793-1857)
- **Bernhard Riemann** (1826-1866)

Tra la fine del XIX secolo e l'inizio del XX operarono **Moritz Pasch** (1843-1930) e **David Hilbert** (1862-1943) autore dei ***Grundlagen der Geometrie*** , pubblicato nel **1899**; quest'ultimo mise a punto il moderno sistema di assiomi per la geometria euclidea.

Nel **1891 Giuseppe Veronese** (1854-1917) elaborò una geometria non-archimedeica.

La geometria assoluta di J. Bolyai
« scienza dello spazio assolutamente vera »

Geometria indipendente dal V postulato

**NON SI AFFERMA E NON SI NEGA IL POSTULATO
STESSO**

La somma degli angoli interni di un triangolo
non si misura



Janos Bolyai
(1802-1860)



L'ipotesi dell'angolo acuto Gauss- Bolyai-Lobacewskij

Il V postulato viene sostituito dal seguente:

Postulato di Lobaceskij: Assegnati un piano una retta ed un punto non appartenente ad essa esistono almeno due rette passanti per tale punto e non aventi alcun punto in comune con la retta data

- I due angoli del quadrilatero di Saccheri sono acuti
- La somma degli angoli interni di un triangolo è minore di due retti

L'ipotesi dell'angolo ottuso B. Riemann

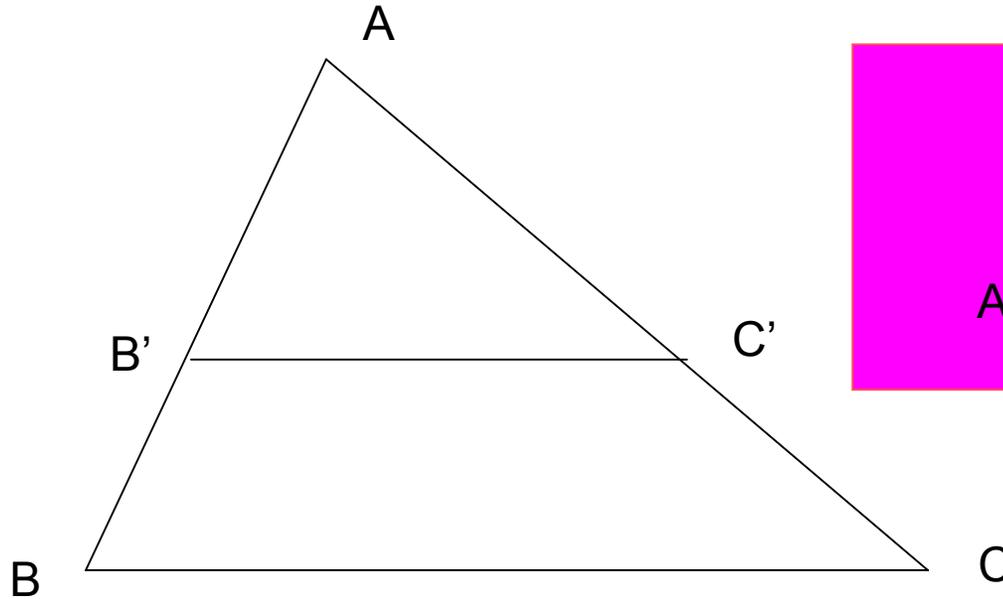
*Über die Hypothesenwelche der Geometrie
zu Grundenliegen,*
lavoro del 1854 pubblicato 13 anni dopo



Postulato di Riemann: Le rette sono linee chiuse e non esistono coppie di rette complanari senza punti in comune

- Viene negata la proprietà della retta di essere prolungabile.
- Gli angoli del quadrilatero di Saccheri sono ottusi
- La somma degli angoli interni di un triangolo è maggiore del piatto
- Merita citare che nella geometria di Riemann due triangoli simili sono anche congruenti!

Si dimostra in precedenza che la somma degli angoli interni di un poligono convesso di n lati risulta maggiore di $(n-2)$ angoli piatti



ABC simile a $AB'C'$
Allora
ABC congruente ad $AB'C'$

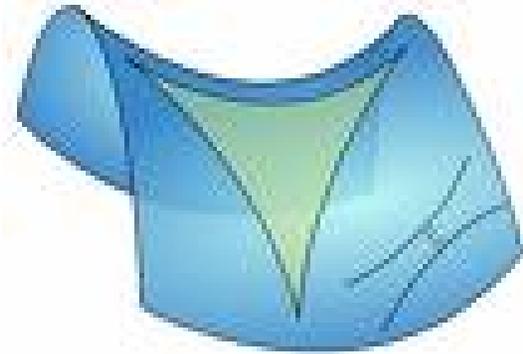
Per assurdo supponiamo ABC e $AB'C'$ non congruenti; è possibile allora sovrapporli come in figura ottenendo un quadrilatero $BCC'B'$ avente la somma degli angoli interni uguale a due piatti. Questo non è accettato per quanto ammesso in precedenza

Tra i matematici impegnati nello studio che porta alla nascita e allo sviluppo delle geometrie non - euclidee è doveroso citare

F. L. Wachter (1792-1817)

F.K. Schweikart (1780-1857)

F.A. Taurinus (1794-1874)

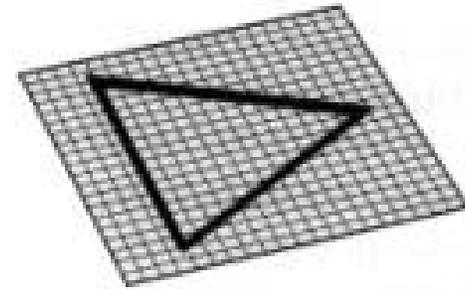
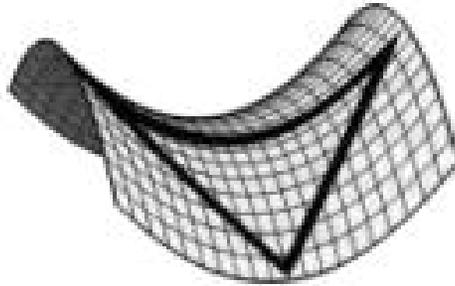
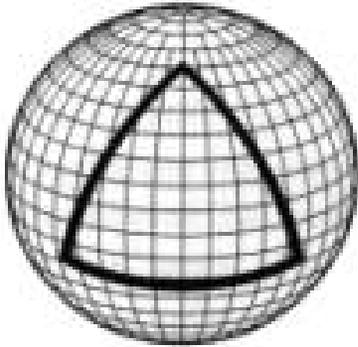


GAUSS: superfici intese non come contorni di corpi, ma piuttosto come corpi di cui una dimensione è infinitamente piccola

Ricordiamo inoltre che

Felix Klein (1849-1925) ed Eugenio Beltrami (1835-1900)

si occupano dello studio della geometria euclidea e delle **nuove geometrie sulle superfici di solidi di rotazione.**



alla loro opera risalgono i nomi di

Geometria **parabolica**

euclidea

Geometria **iperbolica**

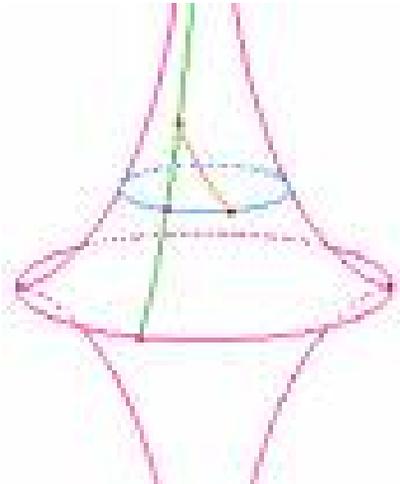
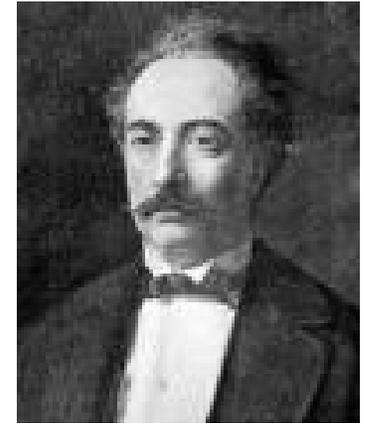
Gauss – Lobacewskij- Bolyai

Geometria **ellittica**

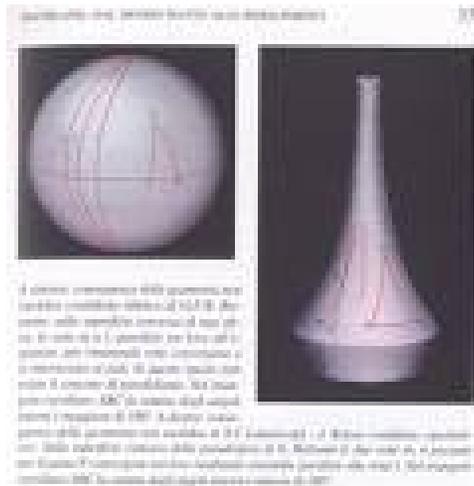
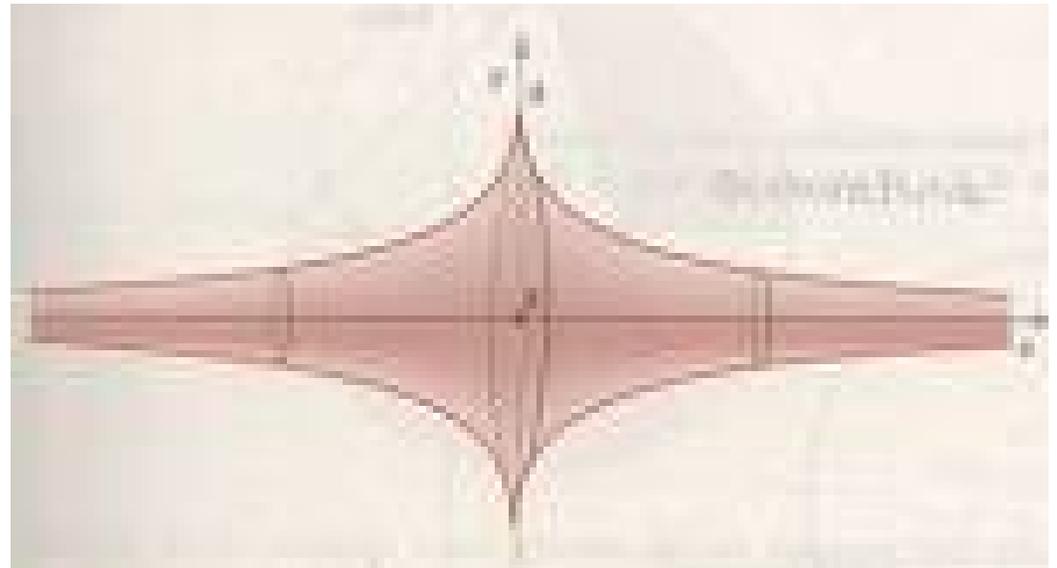
Riemann

Eugenio Beltrami

1835-1900



1886, pseudosfera



DALLA GEOMETRIA ALLE GEOMETRIE

Quale di queste geometrie è quella “giusta”?

Si pone un problema non semplicemente tecnico-matematico, ma di natura essenzialmente **logica**.

Per secoli si era creduto che gli **assiomi di Euclide** fossero non solo i più "**veri**" e **plausibili** ma gli "**unici**" che permettessero di pensare una geometria coerente.

Ora è possibile costruire geometrie altrettanto valide e coerenti con **assiomi diversi e con conseguenze** diverse.

Questo fatto darà origine a nuove vedute sulla struttura logica della geometria e della matematica in generale.

La geometria diventa una serie di sistemi ipotetico-deduttivi in cui un legame di necessità logica unisce, entro ciascun sistema, i teoremi agli assiomi.

Quale evidenza può accreditare la geometria euclidea nei confronti delle sue concorrenti non-euclidee?

Che cosa vuol dire VERO ?

VERO è tutto ciò che non porta contraddizioni

DA EUCLIDE A HILBERT

LA BONTÀ DEGLI ASSIOMI non è data dalla corrispondenza alla nostra intuizione e dal suffragio di una supposta evidenza, quanto dalla loro **coerenza**, cioè dalla mancanza di paradossi e contraddizioni, e dalla **completezza**, cioè dalla capacità di confutare o dimostrare ogni proposizione

Il problema diventa

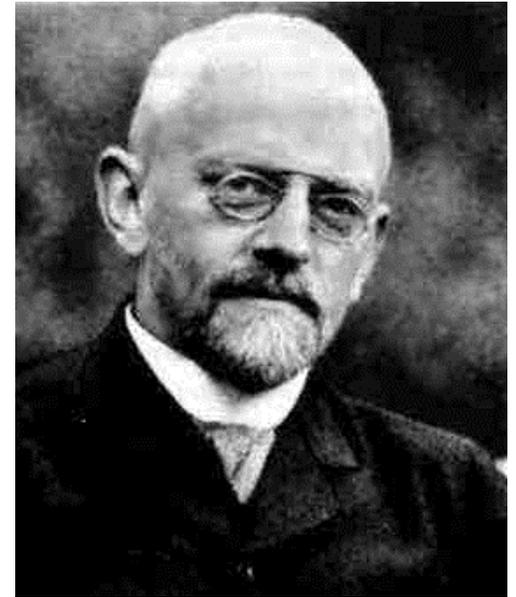
dimostrare **LA NON CONTRADDITTORIETÀ E LA COMPLETEZZA DI UNA TEORIA**

Vero = dimostrabile

**WIR MÜSSEN WIRDEN, WIR WERDEN WISSEN!
IN DER MATHEMATIK GIBT ES KEIN *IGNORABIMUS!***

**NOI DOBBIAMO SAPERE, NOI SAPREMO!
IN MATEMATICA NON ESISTONO IGNORABIMUS**

Koenigsberg, settembre 1930



David Hilbert

1862-1943

Il sogno di Hilbert

Edificare l'intera struttura della matematica come una libera famiglia di sistemi assiomatici, ognuno dotato dei suoi bravi fondamenti e delle sue brave regole di deduzione, tutti coerenti e completi e dunque capaci di dominare senza contraddizioni qualsiasi questione in qualunque ambito di ricerca

La geometria che ne deriva è una scienza formale puramente deduttiva

Geometria come salsicce

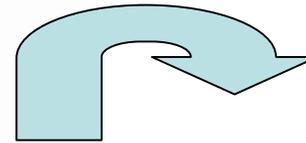
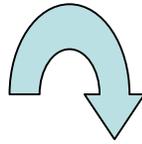


La geometria e la matematica in generale si riducono

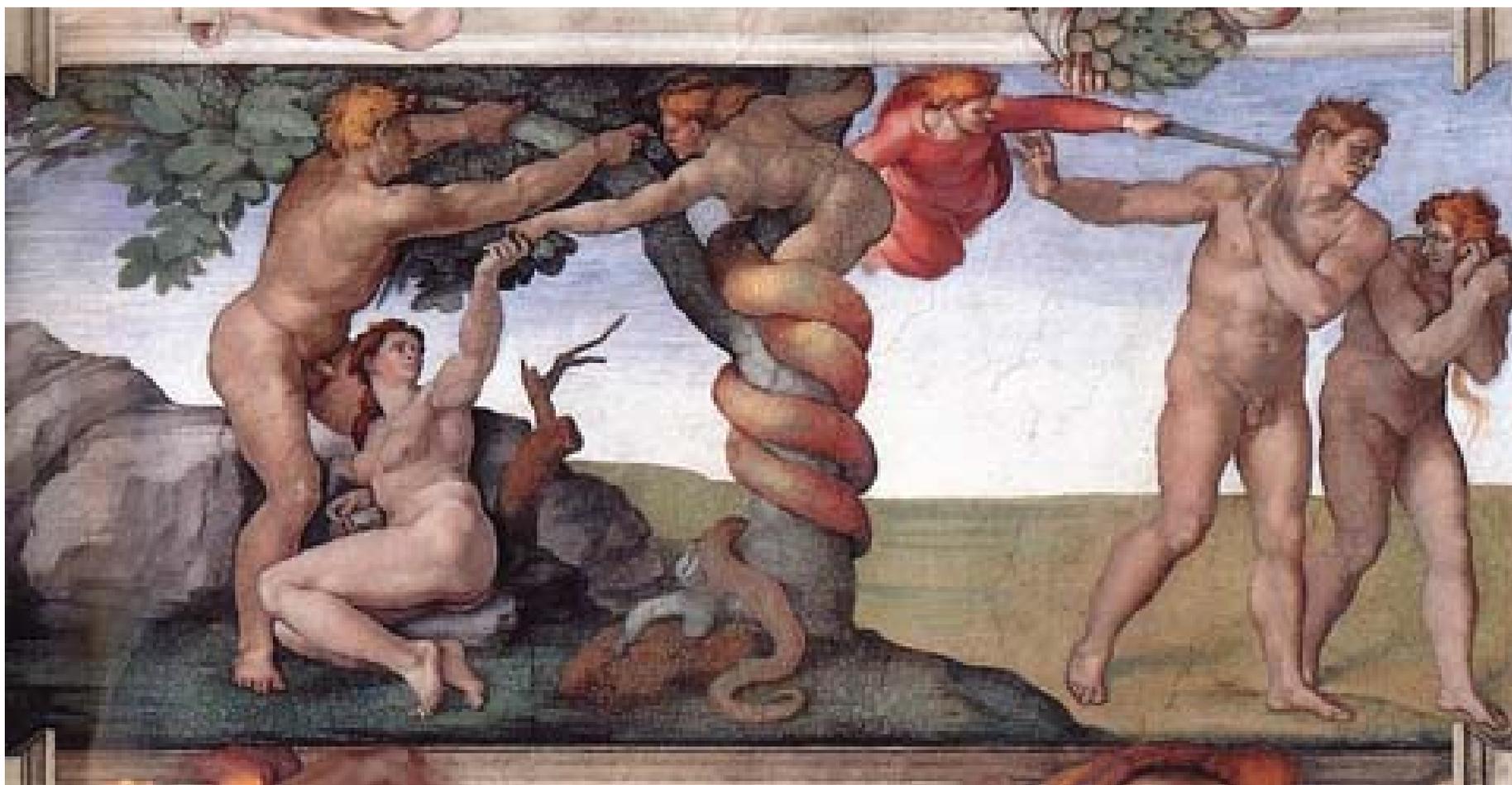
a una macchina in cui si introducono gli assiomi da una parte e si raccolgono i teoremi dall'altra , come nella leggendaria macchina di Chicago dove i maiali entrano vivi ed escono trasformati in prosciutti e salsicce

H. Poincaré

Termini Assiomi Relazioni



teoremi



La cacciata dal paradiso !

T è una teoria

e1 e2 e3

R1 R2 R3

L1 L2 L3

enti

relazioni tra gli enti

relazioni logiche tra gli enti

T

È COERENTE?

Cerco **in T** una dimostrazione



Kurt Gödel 1906-1978

Herr Warum

(Signor perché)

INUTILE!

come dimostra

Gödel nel 1931



Ignorabimus

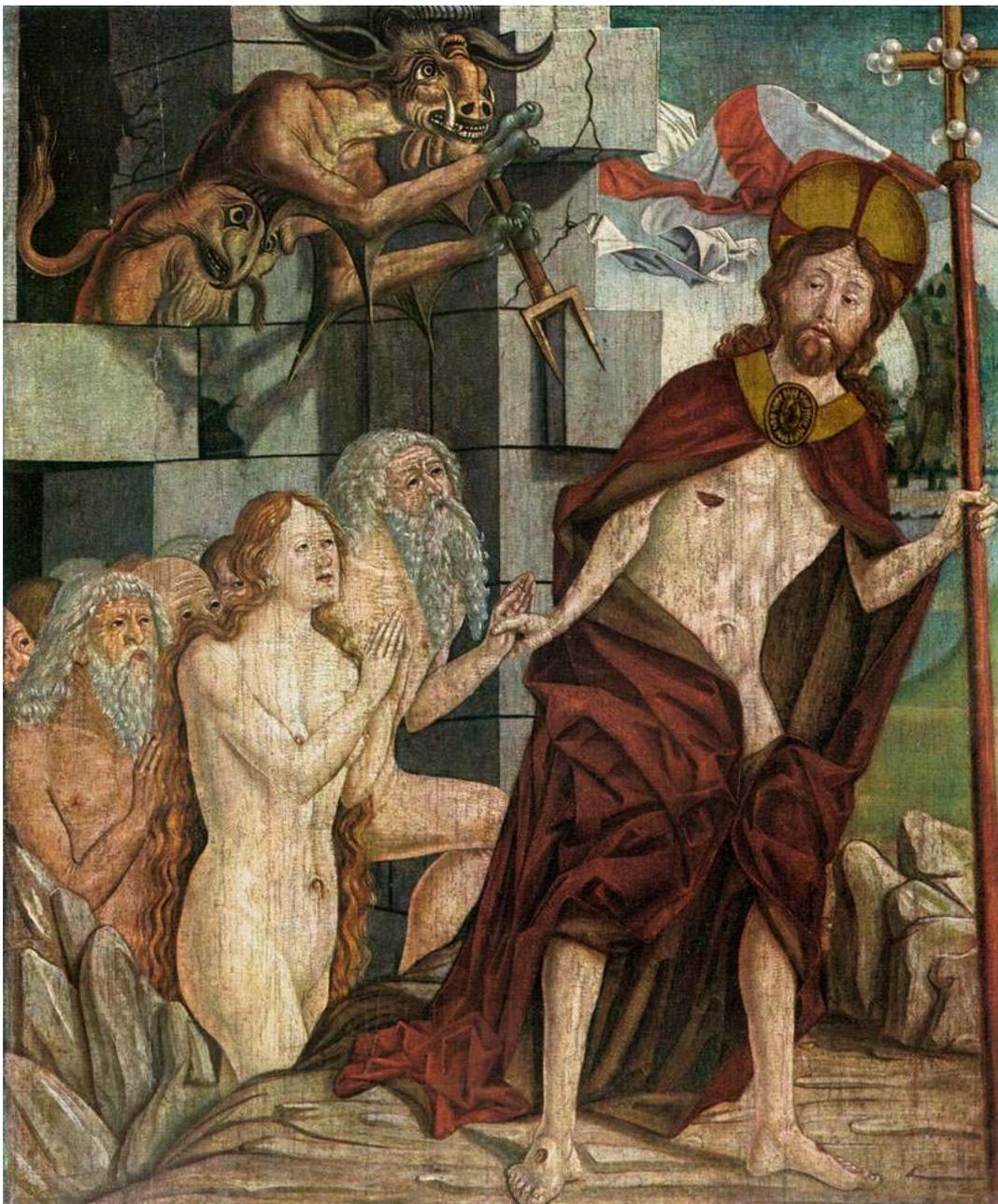
I paradisi coerenti e completi di Hilbert
ci sono in parte preclusi

Ma
questo è anche intrigante!



Come nell'*Infinito* di Leopardi c'è una *siepe* che ci separa da *l'ultimo orizzonte* e ce ne preclude *il guardo*, ma non l'immaginazione
Ci fa figurare *interminati spazi e sovrumani silenzi e profondissima quiete*

*Così tra questa immensità s'annega il pensier mio
E il naufragar m'è dolce in questo mare*



Cerchiamo una
alternativa

L'IDEA DI **MODELLO**

Unica alternativa:

assumo un'altra teoria **S'** come **MODELLO**, dove **S'** è una sottoteoria di **S** nota e della quale **MI FIDO!**

Creo una **corrispondenza biunivoca** tra gli enti e le relazioni di **S'** e di **T** in modo che si conservino le relazioni tra gli enti corrispondenti.

$S' \longrightarrow T$

S'

T

- s_1, s_2, s_3, \dots

- r_1, r_2, r_3, \dots

- L_1, L_2, L_3, \dots

- e_1, e_2, e_3, \dots

- R_1, R_2, R_3, \dots

- L_1, L_2, L_3, \dots

Se S' è un modello per T , allora T è coerente.

Se in T ci fosse una contraddizione sarebbe nei legami logici tra enti e la stessa contraddizione sarebbe in S' ,

ma allora anche in S ,

ma di S MI FIDO !

La coerenza di T viene rimandata
alla coerenza di S

si rinvia ad una teoria che viene
assunta come coerente!

**IL MODELLO DI
KLEIN
DELLA GEOMETRIA
DI LOBACEWSKIJ**



Felix Klein

1849-1925

Geometria di Lobacewskij (T)

- **Piano**
- **Punto**
- **Retta (illimitata)**

- Per due punti passa sempre una e una sola Retta

- Data una retta r ed un punto P esterno ad r , le rette del fascio di centro P si dividono in due classi: secanti e non secanti

- Diciamo parallele le rette non secanti che operano la separazione

- **Esistono per P due parallele a r**
-

Modello di Klein relativo a una conica (S')

- **K-piano**: regione piana interna (bordo escluso) ad una Conica, ad esempio una ellisse
- **K-punto**: punto interno alla regione r
- **K-retta** : corda dell'ellisse estremi esclusi

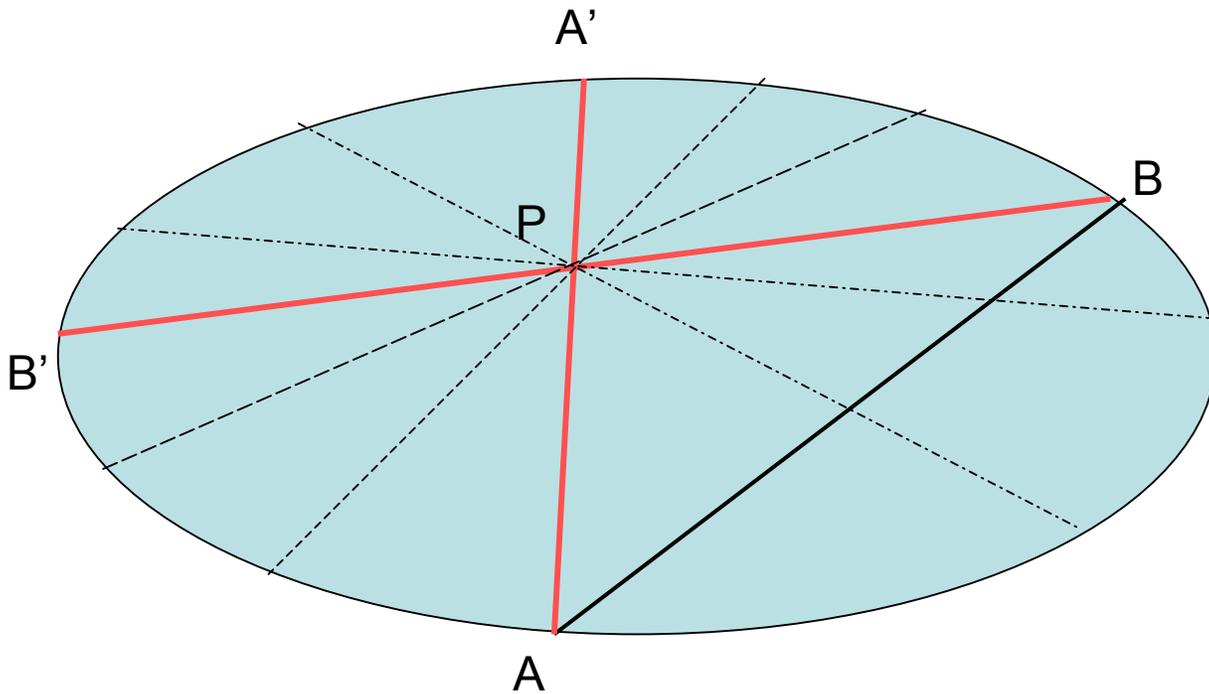
- Per due punti interni passa sempre una corda

- Per un K-punto P esterno ad una corda AB passa una fascio di K-rette, alcune incidenti con la corda altre no.

- Sono parallele alla corda AB le corde PA e PB

- **Esistono per il K-punto P due corde passanti per gli estremi**
-

K-piano



Per P

$AA' \parallel AB$ e $BB' \parallel AB$

IL MODELLO DI POINCARÉ DELLA GEOMETRIA DI LOBACEWSKIJ



Henry Poincaré

1854-1912

Geometria di Lobacewskij (T)

- **Piano**
- **Punto**
- **Retta (illimitata)**

- Per due punti passa sempre una e una sola Retta

- Data una retta r ed un punto P esterno ad r , le rette del fascio di centro P si dividono in due classi: secanti e non secanti

- Diciamo parallele le rette non secanti che operano la separazione

- **Esistono per P due parallele a r**

MODELLO DI POINCARÉ (S')

- **P-piano**: semipiano aperto di origine b
- **P-punto**: punto del semipiano
- **P-retta**: semicirconferenza che ha il centro su b

- Per due P-punti passa una e una sola semicirconferenza

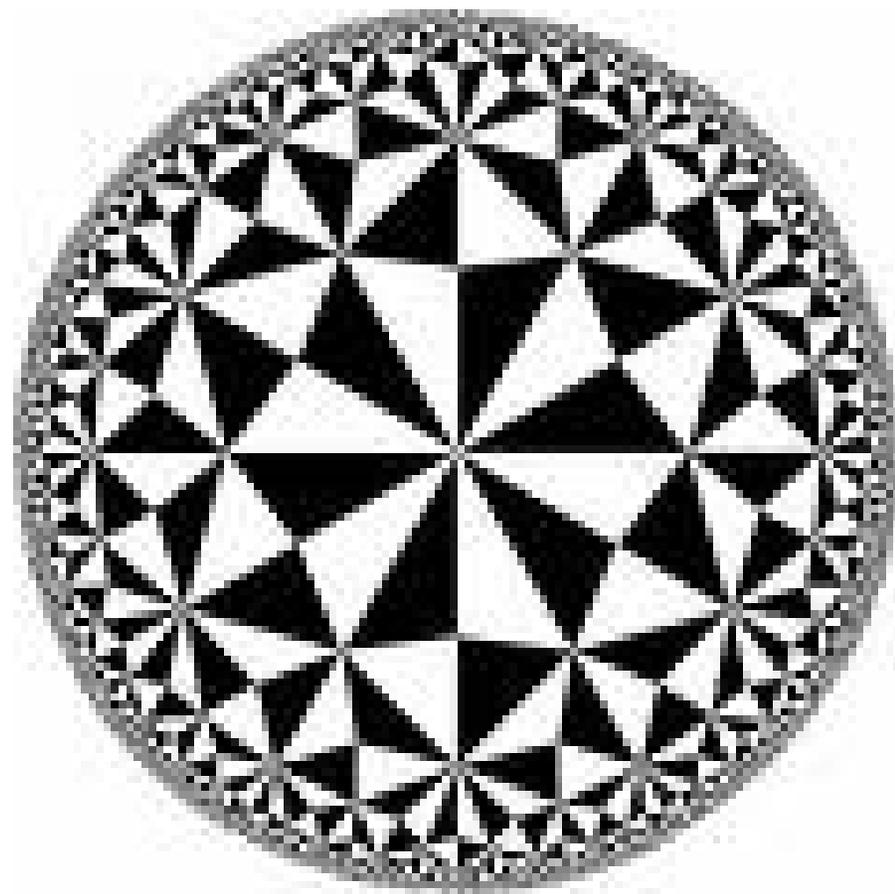
- Data una P-retta AB ed un P-punto non appartenente ad essa ci sono P-rette secanti e P-rette non secanti : i punti della retta origine b non appartengono al piano!
- Sono parallele le due P-rette non secanti che passano per P e per i due punti in cui AB incontra la retta b .
- **Per P passano due P-rette parallele ad AB**



p_piano1.fig



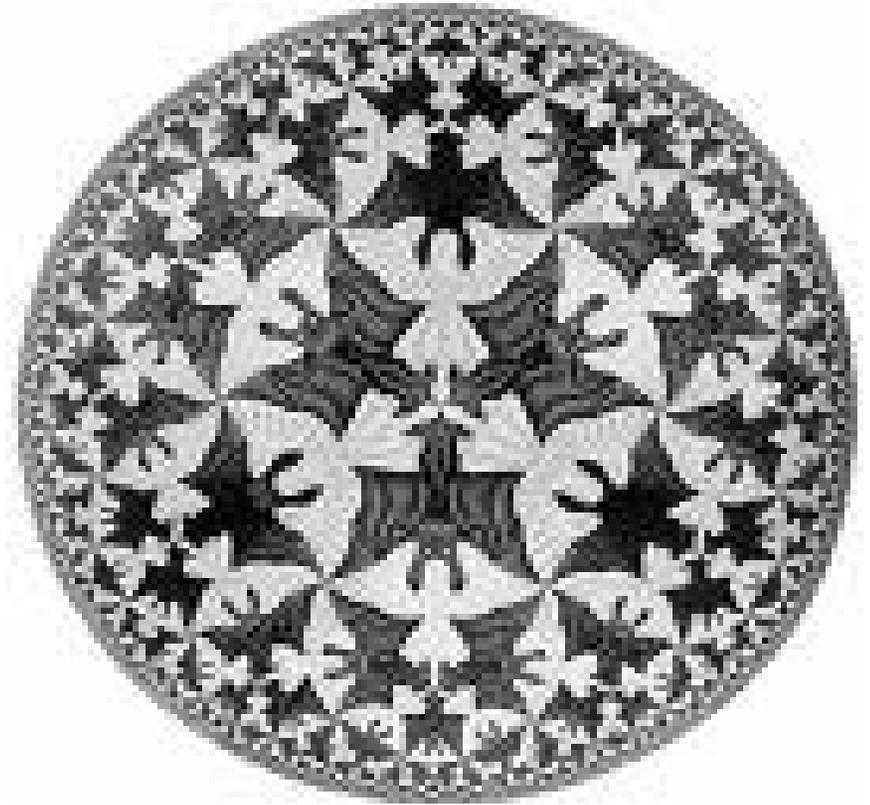
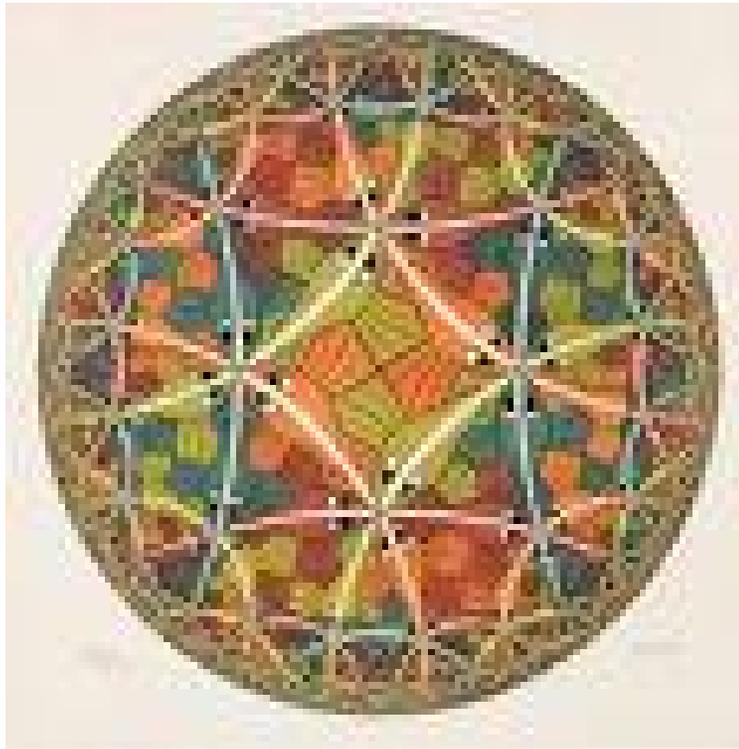
p_piano2.fig



Donald Coxeter, Tassellatura con triangoli del piano iperbolico.



M.C. ESCHER



Modelli della geometria di Riemann



Bernhard Riemann
1826-1866

Geometria di Riemann

- Piano
- Punto
- Retta
- Segmento
- Angolo
- Per due punti passa una e una sola retta
- **Due rette hanno sempre un punto in comune (non esistono parallele)**
- triangolo

Modello di Riemann: geometria della stella di rette e di piani

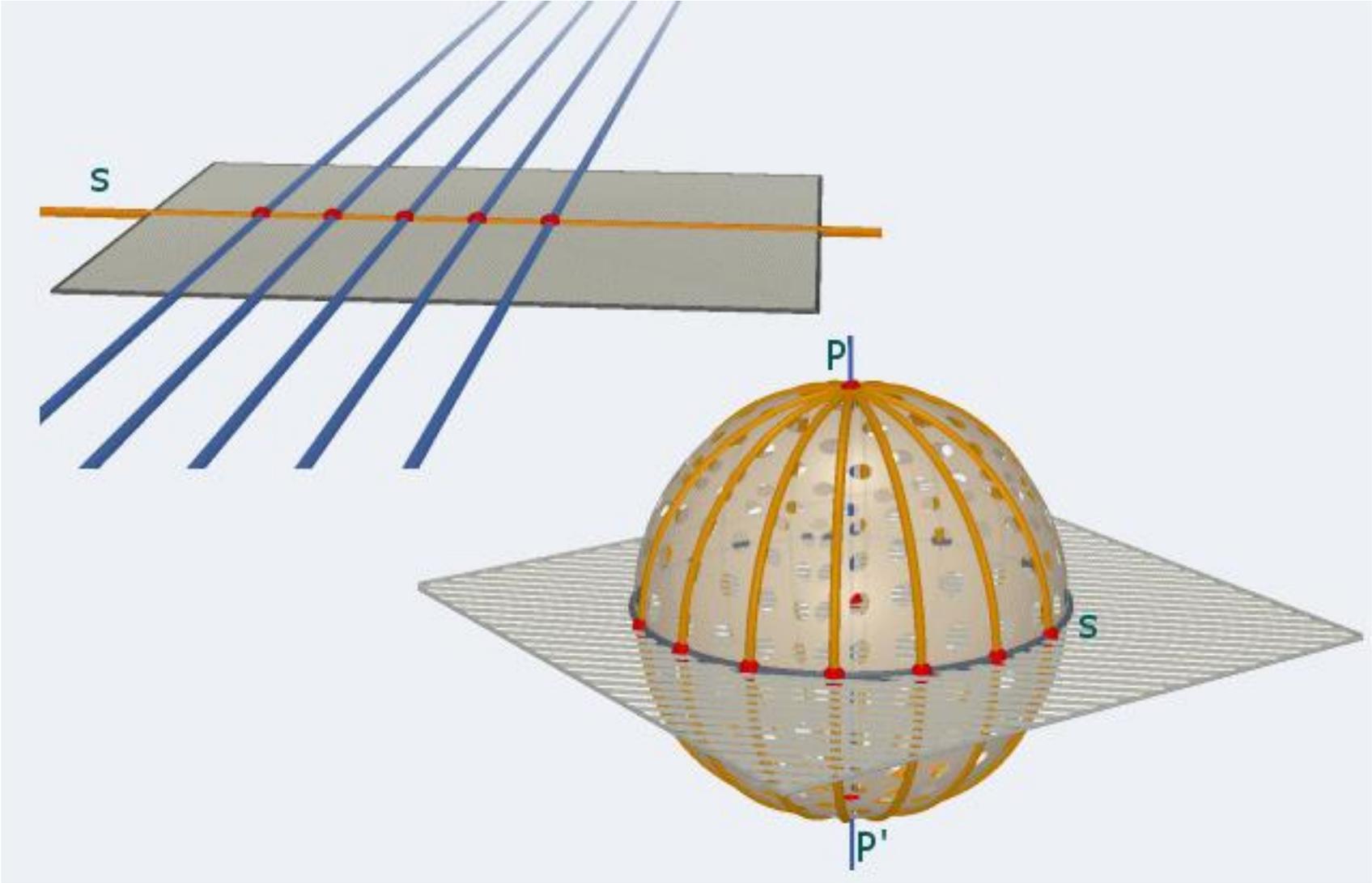
- R-piano: Stella di rette e piani di centro O
- R-punto: retta della stella
- R-retta: piano della stella
- R-segmento: angolo di due rette con il suo opposto al vertice
- R-angolo: diedro con il suo opposto allo spigolo
- Per due rette della stella passa uno e un solo piano
- **Due piani della stella hanno sempre una retta in comune**
-

Geometria di Riemann

- Piano
- Punto
- Retta
- Segmento
- Due rette sono sempre incidenti
-

Modello di Riemann: geometria relativa ad una regione limitata della superficie sferica

- R-piano: regione limitata della superficie sferica
- R-punto: punto della regione limitata della superficie sferica
- R-retta: semicircolo massimo (geodetica)
- R-segmento: arco di circolo massimo
- Due R-rette sono sempre incidenti: due cerchi massimi si incontrano sempre nel polo
-



- Quali traiettorie seguono gli aerei?

- **IL PARADOSSO DEL CACCIATORE**

Un cacciatore parte dal punto P; cammina 1 km verso sud, 1 km verso est e 1 km verso nord e si ritrova in P. Vede un orso e spara. Di che colore è l'orso?

UNA GEOMETRIA **NON DI EUCLIDE** e **non NON-EUCLIDEA**

LA GEOMETRIA DEL TAXÌ

Supponiamo che una città sia una scacchiera, le sue strade il reticolo della scacchiera

Geometria del taxì

- Piano
- Punto
- Segmento

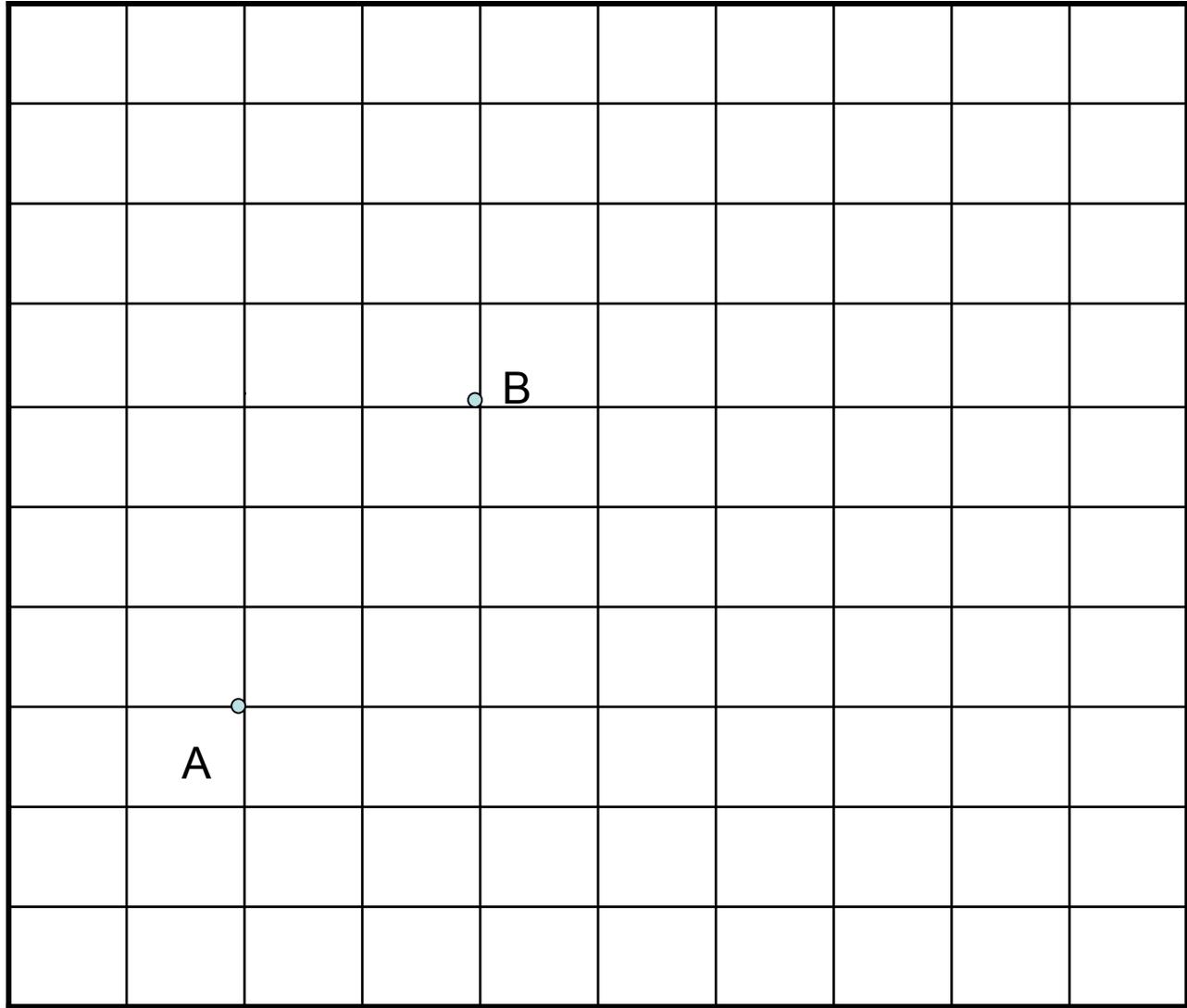
Geometria del piano reticolato

- Piano reticolato
- Nodo del reticolo
- Ogni strada di lunghezza minima da tra due nodi

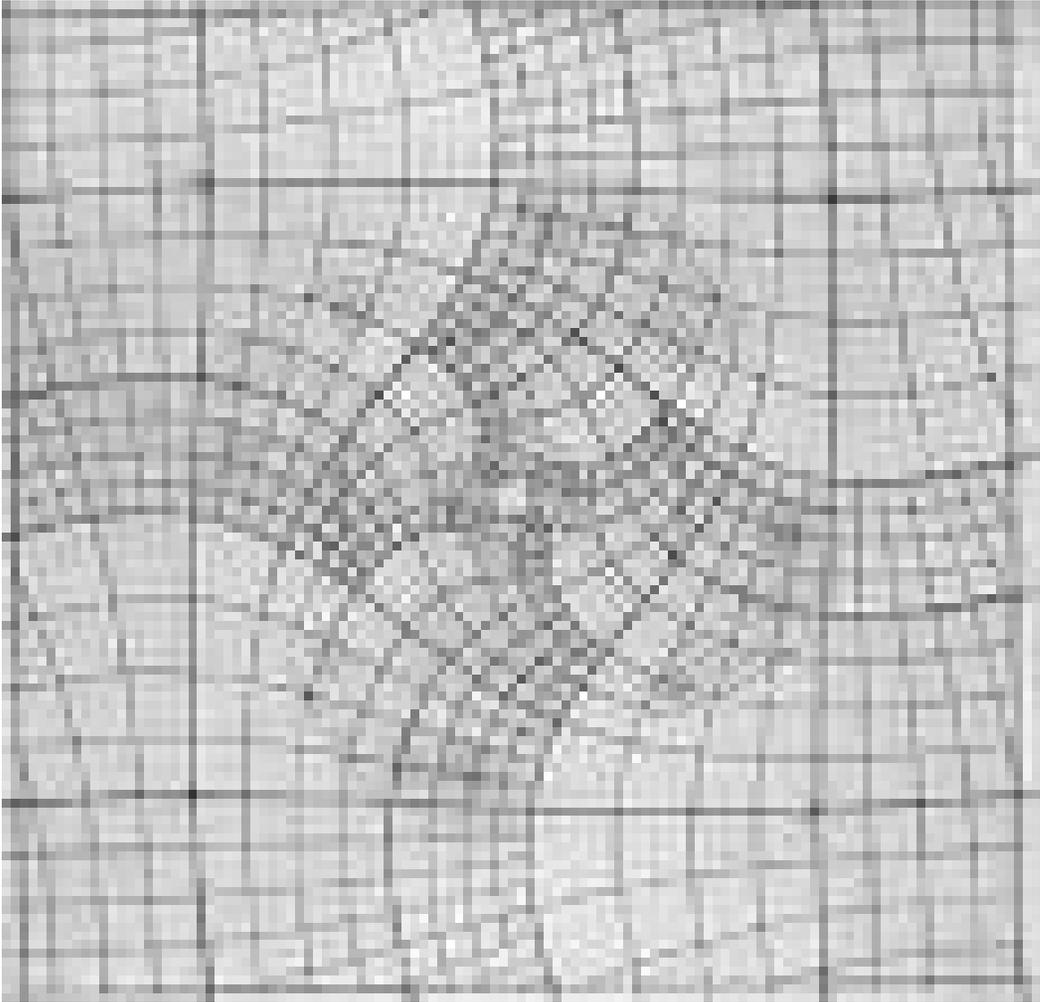
Per due punti passa una e una sola retta ?

Per due nodi c'è una e sola strada?

L'assioma di appartenenza non vale, non è una geometria euclidea ma nemmeno non – euclidea !!!



Reticolo di
Escher





E se vedessimo il mondo così?
Questa potrebbe essere un'altra geometria
E un'altra storia

Geometrie non archimedee

- **ASSIOMA DI ARCHIMEDE**

dati due segmenti AB , CD , esiste un numero naturale n diverso da zero tale che, se si riporta sulla semiretta AB (di origine A) n volte CD a partire da A , il punto P che si determina quale secondo estremo della somma naturale $CD+CD+\dots CD$ (n volte)

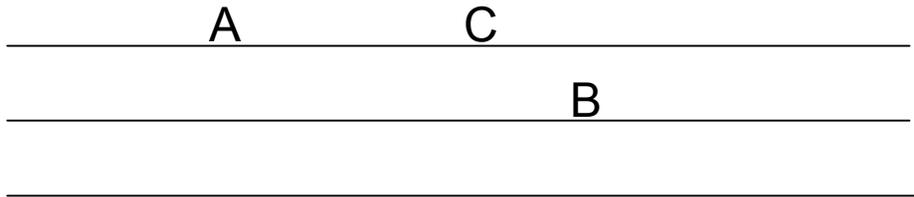
non è compreso tra A e B

In breve: date due grandezze esiste un multiplo della minore che supera la maggiore

La negazione dell'assioma di Archimede

Date due grandezze non esiste un multiplo della minore che superi la maggiore

Modello di G. Veronese 1891



L'ordine dei punti delle rette è così stabilito:

- Su ciascuna retta è fissato uno dei due ordini (esempio da sinistra a destra)
- Ogni punto della prima retta (stabiliamo quella in alto) precede tutti i punti della seconda (quella in basso); equivalentemente ogni punto della seconda (quella in basso) segue ogni punto della prima (quella in alto)

V-piano: rette complanari
parallele disposte a distanza
fissa

V-punto: punto di una di queste
rette

V-segmento di estremi A, B :
tutti e soli i punti che seguono
A e precedono B

verifica gli assiomi
dell'assiomatica hilbertiana,
ma **non quello archimedeo**:
qualsiasi multiplo di un
segmento con estremi sulla
stessa retta è minore di un
segmento con estremi su
rette diverse

*Quale geometria è più adatta a spiegare il
mondo fisico ?*

Le proprietà degli oggetti
che riconosco al tatto

Le proprietà che osservo
con gli occhi

Le proprietà che
giustifico con la
ragione

Le proprietà relative allo
spazio in cui opero

Gauss scrive nel 1817 all'amico Heinrich Olbers

«Mi sto convincendo sempre di più che la necessità della nostra geometria non può essere dimostrata, almeno non dalla mente (Verstand) umana né per la ragione umana. Forse in un'altra vita perverremo ad altre concezioni sulla natura dello spazio, che ora ci sono irraggiungibili.»

(in *Werke* VIII,177)

Bibliografia e indirizzi utili

- Euclide, *Gli Elementi*, Utet, Torino 1970.
- R.J. Trudeau, *La rivoluzione non euclidea*, Bollati Boringhieri, Torino 1991.
- U.Bottazzini, *Il flauto di Hilbert*, UTET, Torino 1990.
- S.Leonesi, C.Toffalori, *Matematica, miracoli e paradossi. Storia di cardinali da Cantor a Goedel*, Bruno Mondadori, Milano 2007

- *Cabri-géomètre*. Una versione dimostrativa di questo software può essere prelevata dalla rete al seguente sito:
<http://www.ti.com/calc/docs/cabri.htm>
- siti dedicati alla storia della matematica, a cominciare dal seguente sito:
http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/history/HistTopics/Non-Euclidean_geometry.html
- Euclid's Elements di David E. Joyce (Clark University, Worcester, MA, USA) versione in rete degli "*Elementi*" di Euclide, con figure interattive e dinamiche realizzate dall'autore in linguaggio Java.
<http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/home.html>
- sito dedicato agli utilizzatori di Cabri-géomètre, ospitato presso l'IMAG di Grenoble:
<http://www-cabri.imag.fr/abracadabri/GeoNonE/GeoNonE.htm>
In questo sito è possibile trovare delle ottime pagine sulle geometrie non euclidee, realizzate usando il software Cabri-géomètre, rese dinamiche con l'aiuto di CabriJava. Parte del sito tradotta in italiano <http://www.provvstudi.tv.it/abrait/>
- Completamente dedicato alle geometrie non euclidee, con ottime pagine utilizzabili in classe, è il sito "NonEuclid" di Joel Castellanos (Rice University, Houston, USA):
<http://math.rice.edu/~joel/NonEuclid>
In questo sito vi è l'illustrazione del modello di Poincaré della geometria iperbolica
- Una fonte inesauribile di risorse di storia, biografie, immagini è il MacTutor of History of Mathematics Archive (Università di St. Andrews, Scozia)
<http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/history/>
- presso l'ETH Zentrum di Zurigo, di Jürgen Richter-Gebert e Ulrich Kortenkamp, è possibile provare una versione dimostrativa del software "Cinderella" per la geometria sulla sfera
<http://www.cinderella.de/>