LICEO CLASSICO EVANGELISTA TORRICELLI

SEZIONE SCIENTIFICA ANNESSA

Le trasformazioni tra natura e arte:

rosoni, fregi e frattali.

Valentina Argnani

4°C sez. scientifica

A.S. 2008/2009

Tesina elaborata col materiale fornito in classe nell'ambito del progetto:

"I cristalli nell'arte, in matematica e in chimica"

in collaborazione con l'Università di Bologna

Indice

1 Introduzione

1.1 Osservazioni generali: la simmetria in letteratura

La natura si presenta ai nostri occhi con diverse forme, che presentano alcune regolarità. Si tratta di simmetrie, come lo scrittore francese Antoine de Saint-Exupéry, scrive nel famoso libro “Il piccolo principe”. Di seguito è riportato un breve passo del dialogo tra un fiore e il piccolo principe:

“Come sei bello!”

“Vero”, rispose dolcemente il fiore, “e sono nato insieme al sole...”

Il piccolo principe indovinò che non era molto modesto, ma era così commovente! “Come fai ad essere così bello?”

“Vedi, io sono un fiore e sono una creazione della natura, e in quanto tale sono perfettamente simmetrico...”

“Non capisco” rispose il piccolo principe spiazzato dall’uscita del fiore.

“Ora ti spiego” disse superbamente il fiore.

“**In natura esistono tantissime simmetrie**”

“E a cosa servono?”

“Beh, a fare i fiori belli, non c’è dubbio. Una simmetria della natura è qualcosa che il sole ci ha dato e che nessuno potrà mai imitare.

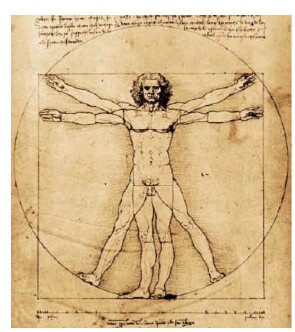
Tutto, in natura, nasce da una simmetria. Tante cose in natura sono simmetriche, sai?” “Cosa?” “Ad esempio le **stelle marine, i fiocchi di neve, le celle degli alveari delle api e i cristalli...l'uomo!**”

“Mai stata neve né api sul mio pianeta”

Il piccolo principe però era attirato dai discorsi del fiore.

“Tutti gli esseri viventi sono belli e simmetrici sotto diversi punti di vista... io, ad esempio, sono colorato e le **simmetrie dei colori** dei miei petali mi fanno bello”.



“La simmetria è l’elemento principe, la fiaccola, che guida il matematico a scoprire le leggi della natura con il puro intelletto, ancor prima che dedurle dai fatti sperimentali”.
(Paolo Marani, commento al libro “L’ equazione impossibile. Come un genio della matematica ha scoperto il linguaggio della simmetria” di Livio Mario, sul sito www.ibs.it)

Alla regolarità della natura s’ispira l’arte. Stilizzando generalmente forme vegetali, si possono creare opere di estrema perfezione: i rosoni e i fregi.

1.2 Introduzione alla teoria sulle trasformazioni

Una **trasformazione geometrica** del piano in sè è una funzione biunivoca t: $\pi \rightarrow \pi$ che ad ogni punto del piano associa un punto del piano.
Essendo biunivoca, una trasformazione t è anche invertibile. L’inversa è anch’essa una trasformazione. L’inversa di una trasformazione è quella trasformazione che, composta con la prima dà l’identità I, cioè: $t \circ t^{-1} = t^{-1} \circ t = I$
Una trasformazione è detta **involutoria**, se coincide con la sua inversa.
Si dice **isometria** una trasformazione che conserva le distanze.

1.2.1 Definizioni

Un punto è detto **unito** per una trasformazione t se $t(P) = P$, cioè se ha se stesso come immagine.
Una retta è **unita** se, preso un punto P appartenente alla retta, il punto $t(P) = Q$ appartiene alla retta. Q può essere diverso da P, in tal caso la retta è unita ma non costituita da punti uniti; se $Q=P$ per ogni punto P allora la retta è unita e formata da punti uniti.
Una figura F è **unita** per una trasformazione t se mediante t viene portata in se stessa cioè se $t(F)=F$.

Se nel piano è definito un sistema cartesiano ortogonale Oxy, una trasformazione geometrica associa al punto $P(x,y)$ il punto $P'(x',y')$.
Le coordinate di P' si determinano mediante le equazioni della trasformazione $t\begin{cases} x' = f(x,y) \\ y' = g(x,y) \end{cases}$ dove con $f(x,y)$ e $g(x,y)$ s’intendono espressioni lineari che contengono x e y.
$f(x,y)$ e $g(x,y)$ sono espressioni lineari, poiché le trasformazioni portano rette in rette.

1.2.2 Schema sulle isometrie

Sulla sinistra si trovano le equazioni delle trasformazioni con la rispettiva inversa, sulla destra le definizioni e le principali proprietà.

Identità $I\begin{cases} x' = x \\ y' = y \end{cases} \quad I^{-1}\begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}$	- La **trasformazione identica o identità** porta il punto *P(x,y)* in se stesso. È l'elemento neutro dell'operazione di composizione di trasformazioni. - È una trasformazione involutoria.
Traslazione $\tau_v\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$ $\tau_v^{-1}\begin{cases} x = x' - a \\ y = y' - b \end{cases}$	- La **traslazione di vettore** ***v(a,b)*** porta il punto *P(x,y)* nel punto *P'(x',y')*. - La traslazione non ha punti uniti se $v(p,q) \neq (0,0)$. - La traslazione di vettore nullo è l'identità ed ogni punto è unito. - Le rette aventi la stessa direzione del vettore *v* (parallele a *v*) sono unite.
Simmetria centrale $\sigma_C\begin{cases} x' = -x + 2x_C \\ y' = -y + 2y_C \end{cases}$ $\sigma_C^{-1}\begin{cases} x = -x' + 2x_C \\ y = -y' + 2y_C \end{cases}$ Caso particolare: $\sigma_O\begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases}$ con centro l'origine	- Si definisce **simmetria centrale di centro** $\boldsymbol{C(x_C, y_C)}$ la trasformazione che ad un punto *P* del piano associa un punto *P'* tale che *P'* appartiene alla retta *CP* e $\overline{CP'} = \overline{CP}$. (*C* è punto medio di *PP'*). - La simmetria centrale è involutoria in quanto $\sigma_C^{-1} = \sigma_C$ - L'unico punto unito è il centro. - Ogni retta passante per il centro è retta unita.

Simmetria assiale	
$\sigma_x \begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$ rispetto all'asse *x*; $\sigma_1 \begin{cases} x' = x \\ y' = 2k - y \end{cases}$ rispetto a *y*=*k*; $\sigma_y \begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases}$ rispetto all'asse *y*; $\sigma_2 \begin{cases} x' = 2h - x \\ y' = y \end{cases}$ rispetto a *x*=*h*; $\sigma_3 \begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$ rispetto alla bisettrice del 1° e 3° quadrante $\sigma_4 \begin{cases} x' = -y \\ y' = -x \end{cases}$ rispetto alla bisettrice del 2° e 4° quadrante	- Data una retta *r* (asse) e un punto *P* del piano, il **simmetrico** di *P* rispetto alla retta *r* è il punto *P'* tale che *PP'* è perpendicolare alla retta *r* e detto *H* il punto comune tra le due rette si ha che $\overline{PH} = \overline{P'H}$. (Se *P* non appartiene alla retta *r* allora *P'* appartiene al semipiano generato da *r* che non contiene *P*). - In generale, per determinare le equazioni della simmetria rispetto ad un dato asse occorre considerare il punto medio tra *P(x,y)* e *P'(x',y')*, imporre che tale punto appartenga all'asse e determinare il coefficiente angolare della retta *PP*', $m = \frac{y'-y}{x'-x}$ e imporre che il prodotto tra *m* e il coefficiente angolare dell'asse sia uguale a -1. Si risolve il sistema formato dalle due equazioni così ottenute e si ricava *x'* e *y'* in funzione di *x* e *y*. - Ogni punto dell'asse è punto unito. - L'asse è una retta unita. - Le rette perpendicolari all'asse sono rette unite. - L'inversa di ogni simmetria assiale è la simmetria stessa (trasformazione involutoria)

<table>
<tr>
<td>Rotazione
$\rho_{O,\alpha}\begin{cases} x' = x\cos\alpha - y\,\text{sen}\,\alpha \\ y' = x\,\text{sen}\,\alpha + y\cos\alpha \end{cases}$
equazioni della rotazione di centro O e angolo α.

$\rho_{O,\alpha}^{\ -1}\begin{cases} x' = x\cos\alpha + y\,\text{sen}\,\alpha \\ y' = -x\,\text{sen}\,\alpha + y\cos\alpha \end{cases}$
(ottenuta considerando l'angolo -α)

$\rho_{C,\alpha}\begin{cases} x' = (x-x_c)\cos\alpha - (y-y_c)sen\alpha + x_c \\ y' = (x-x_c)sen\alpha + (y-y_c)\cos\alpha + y_c \end{cases}$

equazioni della rotazione di centro $C(x_C, y_C)$</td>
<td>- Fissati nel piano un punto C e un angolo α, si dice rotazione di centro C e angolo α la trasformazione che ad ogni punto P associa un punto P' tale che $\overline{CP'} = \overline{CP}$ e che l'angolo $P\hat{C}P'$ misuri α.

Casi particolari.

- Se $\alpha = \pi$ o $\alpha = -\pi$ la rotazione coincide con la simmetria centrale di centro l'origine.
- Se $\alpha = 2k\pi$ la rotazione coincide con l'identità.

- L'unico punto unito è l'origine (se $\alpha \neq 2k\pi$)
- Non vi sono rette unite se $\alpha \neq k\pi$

- La rotazione può avere un centro $C(x_C, y_C)$ diverso da O(0,0). Le formule in tal caso possono essere ottenute dalla composizione tra la traslazione di vettore , $v(-x_C, -y_C)$, la rotazione di centro O e la traslazione di vettore $v_1(x_C, y_C)$).</td>
</tr>
</table>

1.2.3 Composizioni

Formalmente, date due funzioni *f*: $X \rightarrow Y$ e *g*: $Y \rightarrow Z$ definiamo la **funzione composta** $g \circ f$: $X \rightarrow Z$ ponendo $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ per ogni *x* in *X,* cioè applicando prima *f* ad *x* e quindi applicando *g* al risultato *f*(*x*).

Date due trasformazioni *f* e *g* la loro **composizione** $f \circ g$ (oppure $g \circ f$) è ancora una trasformazione.

La composizione di trasformazioni non gode in generale della proprietà commutativa quindi $f \circ g \neq g \circ f$.

Introduciamo il concetto di gruppo.

Un insieme *G* in cui è definita l'operazione ⊕ (*G;* ⊕) è detto gruppo se

- *G* è chiuso rispetto all'operazione ⊕ $\quad a \oplus b \in G$;
- se ⊕ è un'operazione che gode della proprietà associativa $\quad a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus c$;
- se esiste l'elemento neutro *h* $\quad a \oplus h = a$;
- se ogni elemento *a* di *G* ammette il simmetrico o reciproco $\bar{a}$ $\quad \exists \bar{a}: a \oplus \bar{a} = h = \bar{a} \oplus a$.

La composizione d'isometrie è un gruppo?

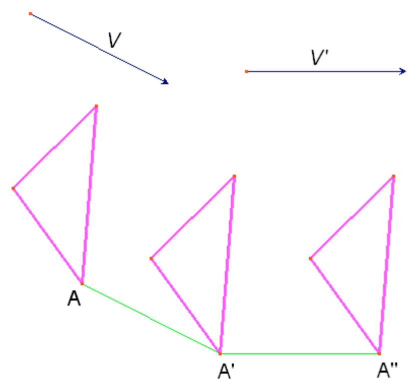
- La composizione di due isometrie è ancora un'isometria: il gruppo è chiuso.
- La composizione di due funzioni gode sempre della proprietà associativa.
- L'elemento neutro è l'identità.

- Ogni isometria ha un'inversa.

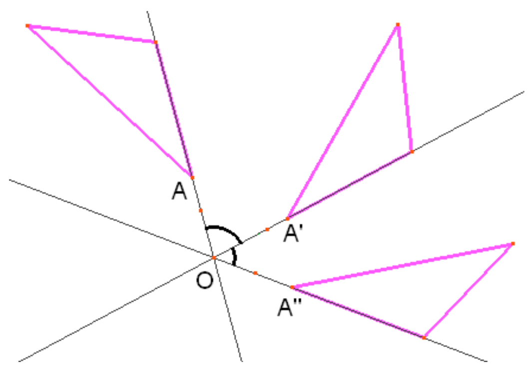
La composizione d'isometrie è un gruppo.

Considerando le singole isometrie, abbiamo dei gruppi solo per:

- le traslazioni;

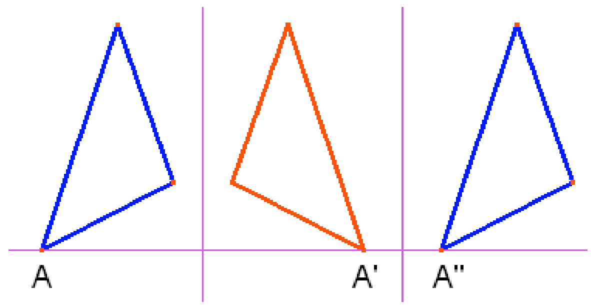


- le rotazioni del piano aventi lo stesso centro (*).

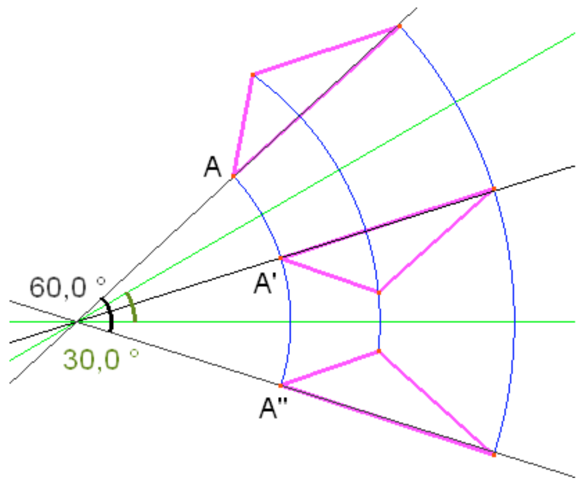


Questo non accade per le simmetrie assiali perché il gruppo non è chiuso rispetto all'operazione di composizione di trasformazioni. Infatti:

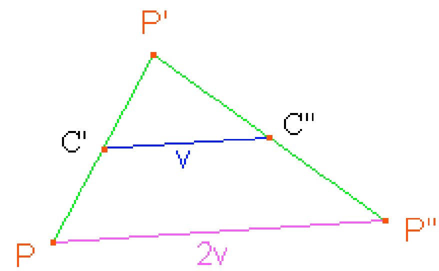
- la composizione di due simmetrie assiali con assi paralleli è una traslazione di vettore doppio rispetto alla distanza fra le due rette;



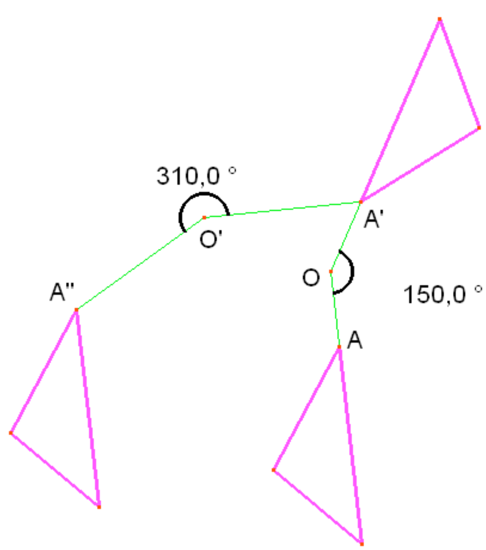
- la composizione di due simmetrie assiali con assi incidenti è una rotazione d'angolo doppio rispetto all'angolo d'incidenza.



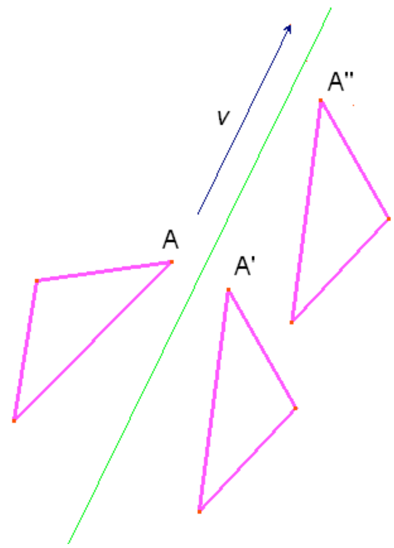
Componendo due simmetrie centrali di centri C_1 e C_2 si ottiene una traslazione di vettore doppio del congiungente i due centri.



(*) L'insieme delle rotazioni del piano non è un gruppo, poiché la composta di due rotazioni aventi angoli α_1 e α_2 , centri O e O' e la somma degli angoli $\alpha_1 + \alpha_2 = 2\pi$ è una traslazione.



Un particolare tipo di composizione è la glissoriflessione (o glissosimmetria), che può essere definita come la composizione di una riflessione rispetto ad una retta e di una traslazione di vettore parallelo all'asse di simmetria. Gode della proprietà commutativa.



2 Rosoni

2.1 In Arte

Con rosone s'intende, in ambito artistico, l'elemento decorativo a forma di finestra circolare applicato alle facciate delle chiese di stile romanico e gotico.

Mandala indiano

I rosoni si ispirano agli antichi *mandala* (foto a lato), che consistono in diagrammi circolari costituiti, di base, dall'associazione di diversi elementi geometrici, in particolare il punto, il triangolo, il cerchio e il quadrato. Il termine sanscrito *mandala* può essere tradotto letteralmente come "contenere l'essenza" (*manda* = essenza; *la* = contenere), oppure come "cerchio", "circonferenza" o "ciclo". Secondo i buddisti, il mandala rappresenta il processo mediante il quale il cosmo si è formato dal suo centro; attraverso un articolato simbolismo consente una sorta di viaggio iniziatico che permette di crescere interiormente. Nel Medioevo esistevano dei mandala che mostravano Cristo al centro e i quattro evangelisti o i loro simboli ai quattro punti cardinali.

2.2 In matematica

Un **rosone** può essere definito come una figura piana in cui il gruppo di simmetria contiene un numero finito di trasformazioni.

La **parte minima** della figura che, presa singolarmente, permette di riprodurre l'intera figura attraverso le rotazioni (o le simmetrie assiali) del gruppo viene chiamata **dominio fondamentale.**

Le isometrie che portano un rosone in sé (le isometrie che lasciano fisso il rosone) sono di due tipi:

- un **gruppo ciclico** che contiene solo rotazioni di centro O e di angoli sottomultipli dell'angolo giro ($\mathbf{2\pi/n}$). Questi rosoni vengono classificati con la lettera C, seguita dal numero di rotazioni;
- un **gruppo diedrale** che contiene tante rotazioni di centro O e angolo minimo, quante simmetrie assiali in rette passanti per O. Questi rosoni vengono classificati con la lettera D seguita dal numero di rotazioni (o di simmetrie assiali).

I gruppi dei rosoni sono i gruppi discreti e finiti di isometrie piane.

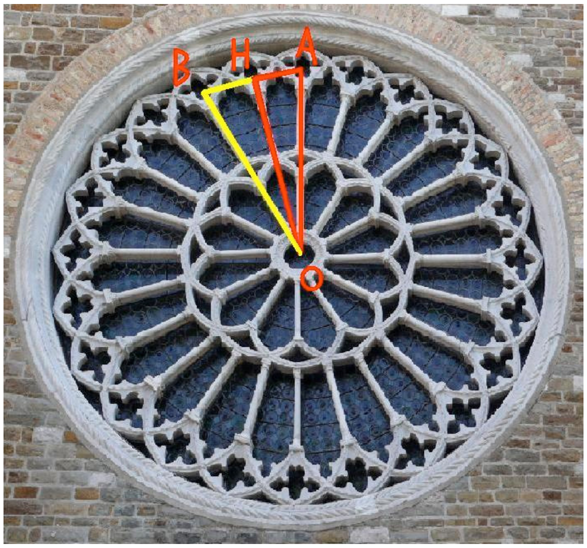
Un gruppo di isometrie si dice **discreto** se non contiene né traslazioni né rotazioni arbitrariamente piccole.

Teorema del punto fisso: Un gruppo discreto di isometrie piane è **finito** se e solo se ha almeno un punto fisso, vale a dire un punto che viene trasformato in se stesso da tutte le isometrie del gruppo.

I gruppi dei rosoni, sono completamente caratterizzati dal **teorema di Leonardo**: "se un gruppo *G* ha un numero finito di elementi allora non può contenere traslazioni (altrimenti conterrebbe tutti i multipli interi di quella traslazione che sono infiniti) e analogamente non può contenere glissoriflessioni".

2.3 Esempi

2.3.1 Cattedrale di San Giusto, Trieste. Rosone in pietra carsica sulla facciata.

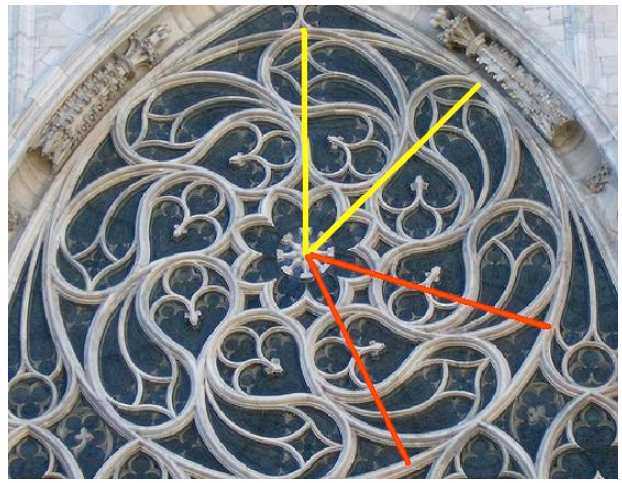


Non considerando il fiore centrale, il rosone presenterebbe 24 rotazioni e 24 simmetrie assiali e verrebbe classificato con D24 (gruppo diedrale). La simmetria assiale sarebbe rispetto al segmento OH, altezza del triangolo isoscele ABO.

Considerando, però, anche la figura centrale, mediante delle rotazioni del triangolo BHO non si otterrebbe la stessa forma del fiore al centro. In conclusione abbiamo 12 rotazioni del triangolo isoscele ABO e 12 simmetrie assiali rispetto ai lati del triangolo. Questo rosone è classificabile con **D12** (gruppo diedrale).

Considerando l'angolo giro di vertice O, esso può essere diviso in 12 parti, corrispondenti agli angoli al vertice dei 12 triangoli. Dunque l'angolo AÔB avrà un'ampiezza pari a 360°/12 = 30° . Le rotazioni sono di 30°.

2.3.2 Duomo di Milano. Rosone nell'abside del Duomo di Milano

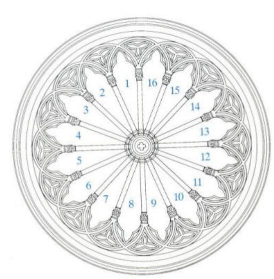


Questo rosone è costituito da otto rotazioni che, come si vede nella figura, possono essere ritrovate in due modi. Le linee gialle passano per i punti di intersezione tra gli otto petali del fiore centrale, dividendo il rosone in otto parti. Quelle rosse passano, invece, per la punta di ogni petalo. Il settore circolare delimitato dalle due rette gialle, così come quello delimitato dalle due rette rosse, è "completo", nel senso che con otto rotazioni può costituire correttamente l'intero rosone. Non è possibile dividere il rosone in 16 parti (senza considerare la differenza tra linee rosse e gialle), in quanto non si riuscirebbe a costruire l'intero rosone con la rotazione del settore ottenuto. Questo rosone, dunque, è del gruppo ciclico **C8**, con angolo di rotazione pari a 360°/8 = 45°. Il gruppo non è diedrale perché non esistono assi di simmetria che, ribaltando una parte di superficie, permettano di ricreare l'intero rosone.

Questo complesso rosone è un'opera dell'artista francese Nicolas de Bonaventura, che lo ha realizzato sotto la direzione dell'architetto modenese Filippino degli Organi. Questo rosone corona, insieme ad altri due, di cui uno identico a quello analizzato, i finestroni che fanno dell'abside della cattedrale la zona più illuminata del duomo.

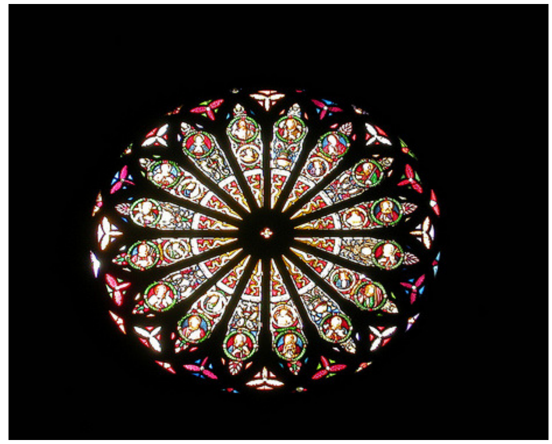
2.3.3 Duomo di Monza. Rosone sulla facciata.

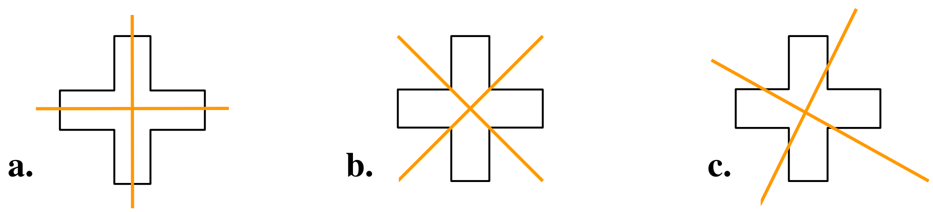
Non considerando la figura centrale, questo rosone presenterebbe 16 rotazioni e 16 simmetrie assiali rispetto alle colonnine che delimitano ognuna delle 16 parti (lancette) del rosone. Si avrebbe dunque un gruppo diedrale D16, con



ogni rotazione di 360°/16 = 22,5°.

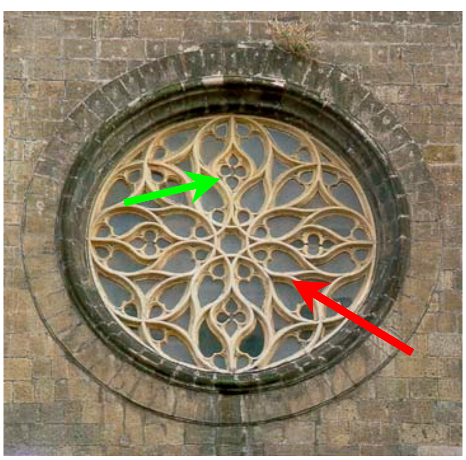
Considerando la figura centrale a forma di "più" (evidente in particolare dall'interno), il rosone può essere classificato con **D4**, in quanto sarebbe un gruppo diedrale ed ogni suo settore circolare sarebbe composto da quattro lancette e avrebbe come asse le colonnine orizzontali e verticali (a). Se gli assi fossero ruotati di 45° rispetto a quelli considerati precedentemente, la situazione resterebbe invariata (b). Se invece si ruotassero gli assi di un angolo qualsiasi, si avrebbe solo un gruppo ciclico **C4** (c).



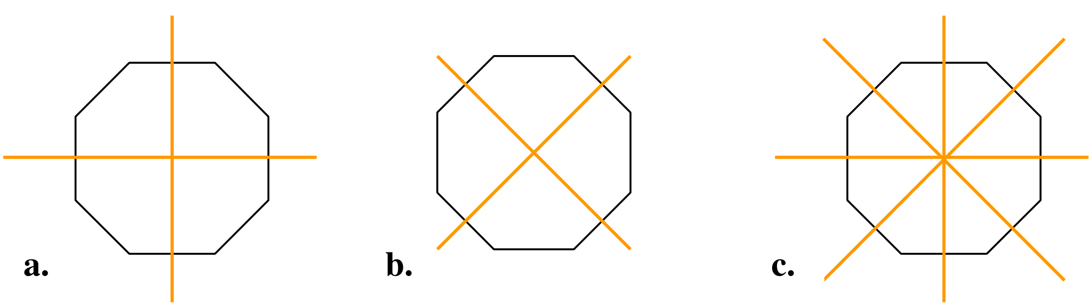


Questo rosone con diametro di 6m presenta 16 immagini di Cristo risorto con la Vergine Maria e Santi nelle lancette, ognuna delle quali misura 135cmx55cm.

2.3.4 Cappella Palatina, Maschio Angioino, Napoli. Rosone sulla facciata della cappella.



Questo complesso rosone può essere classificato come un gruppo diedrale **D4**. Al centro presenta un ottagono e i quattro settori sono ottenuti con assi perpendicolari fra loro, disposti orizzontalmente e verticalmente (a) o ruotati di 45° (b). Non sarebbe possibile dividere il rosone in otto parti (c), in quanto nella parte più esterna del rosone sono presenti solamente quattro fiori (uno dei quali indicato con una freccia verde). Considerando solamente la parte di rosone fino al fiore più grande (indicato dalla freccia rossa), si avrebbe un gruppo diedrale D8, in relazione all'ottagono centrale e agli otto petali del fiore in questione. Questo rosone è stato realizzato da Mattia Forcymania tra 1469 e il 1470.



2.4. In natura

Fiore di Bach

Questo fiore può essere classificato come un gruppo diedrale **D6**.

Girasole

Questo fiore è approssimativamente di un gruppo diedrale, il cui numero di rotazioni e simmetrie coincide con il numero di petali.

Stella marina

Qui si ha un approssimativo gruppo diedrale **D5**.

2.5 Curiosità: significati

Il rosone si associa generalmente al disco solare e con la sua forma circolare rappresenta l'inizio senza una fine. È generalmente una rappresentazione stilizzata di una rosa, fiore sacro prima a diverse divinità, come Iside e Cibale, poi alla Vergine.

(Adattato dal sito ilportaledelmistero.net)

3 Fregi

3.1 In arte

Il fregio è la parte intermedia tra architrave e cornice nella trabeazione di ordini architettonici classici. Nei templi antichi il fregio poteva contenere bassorilievi rappresentanti scene di diverso tipo. In seguito studieremo il fregio come un motivo lineare decorativo.

3.2 In matematica

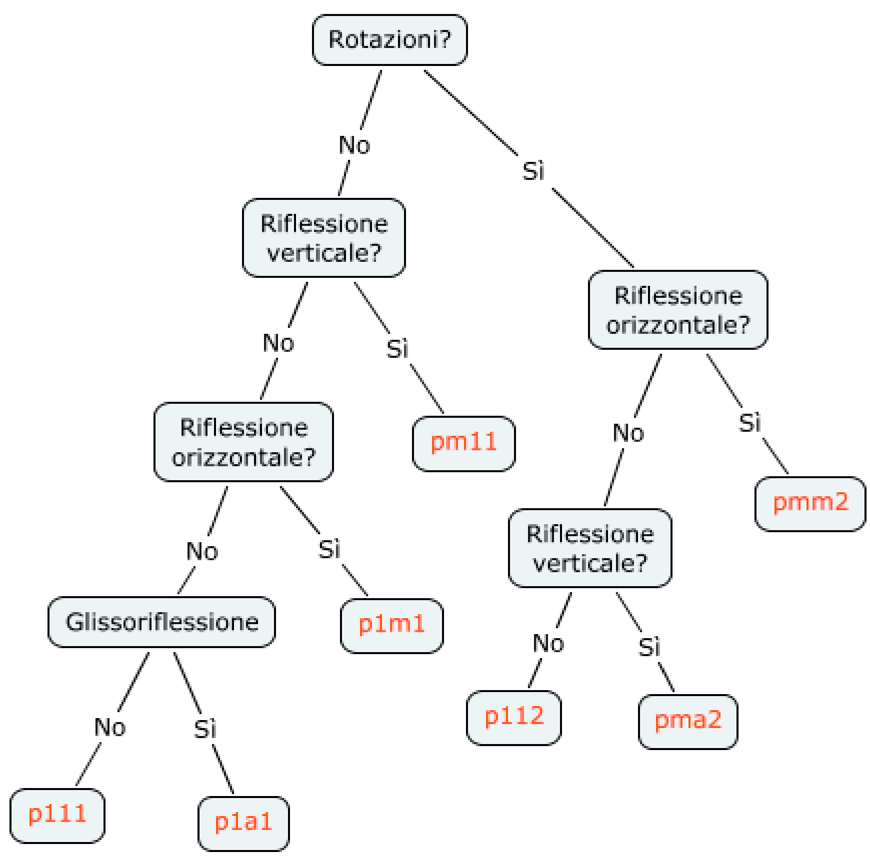
Il termine *fregio* indica una striscia di piano (intersezione non vuota di due semipiani generati da due rette parallele) che è ricoperta dalle copie ripetute di un motivo "base". Le copie sono ottenute mediante delle isometrie, una delle quali è necessariamente una traslazione nella direzione della striscia.

Questa figura è illimitata, infatti possiamo operare la stessa traslazione due volte, tre volte, 1000 volte ... e la figura rimane invariata; quindi, quando definiamo fregio una figura su un pezzo di carta, o su un monumento, immaginiamo che la figura prosegua al di là della pagina o del muro.

Vi sono sette possibili gruppi di simmetria per un fregio. Questi si possono elencare mediante un nome simbolico composto da quattro caratteri che trae le sue origini in cristallografia ed è così costruito:

- il primo segno è sempre una p,
- il secondo segno può essere 1 o m: è una m (che sta per *mirror* = specchio) se il gruppo di simmetria della figura contiene riflessioni (simmetrie assiali) rispetto a rette verticali, altrimenti è un 1.
- il terzo segno può essere 1 o m o *a*: è una m se il gruppo di simmetria della figura contiene una riflessione rispetto ad una retta orizzontale, è una *a* se il gruppo di simmetria della figura contiene una glissoriflessione rispetto ad una retta orizzontale, altrimenti è un 1.
- il quarto segno può essere 1 o 2: è 2 se il gruppo di simmetria della figura contiene rotazioni di 180°, altrimenti è un 1.

Si osservi lo schema.



3.3 Esempi

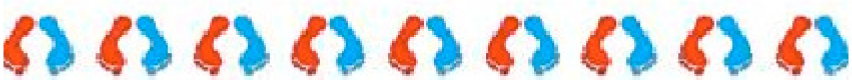
Analizzo ora gli esempi dei sette tipi di fregi, tramite immagini di orme, tratte dal sito www.matematita.it.

3.3.1.

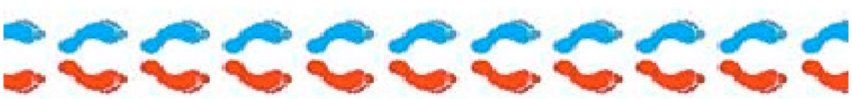

Questo è un fregio di tipo **p111**, in quanto è ottenuto mediante la semplice traslazione dell'orma rossa, di un vettore orizzontale di modulo maggiore alla lunghezza della stessa.

3.3.2.


Questo è un fregio di tipo **p1a1**, ottenuto mediante glissoriflessione dell'orma rossa. L'orma azzurra rappresenta il risultato dalla trasformazione.

3.3.3.


Questo è un fregio di tipo **pm11**, ottenuto mediante riflessioni verticali. La prima orma azzurra sulla sinistra è l'immagine riflessa della prima orma rossa, rispetto all'asse verticale passante tra le due. Traslando la prima coppia si ottengono le successive. Si noti che l'orma rossa della seconda coppia è il simmetrico di quella azzurra, rispetto all'asse che divide le due coppie. Si conferma, dunque, che la traslazione è il risultato della composizione tra simmetrie assiali con assi paralleli.

3.3.4.


Questo è un fregio del tipo **p1m1**, ottenuto tramite riflessioni orizzontali dell'orma rossa, ripetute con traslazioni di vettore parallelo all'asse.

3.3.5.


Questo è un fregio del tipo **p112**, ottenuto con una rotazione di 180° (simmetria centrale) rispetto al punto segnato in verde e con traslazioni ripetute della prima coppia. La terza orma può anche essere ottenuta mediante una traslazione della prima rispetto ad un vettore orizzontale o con una simmetria centrale della seconda orma rispetto al punto segnato in viola.

3.3.6.


Questo è un fregio del tipo **pma2**, ottenuto mediante rotazione di 180° dell'orma azzurra rispetto al punto verde segnato in figura, simmetria rispetto ad un asse verticale per ottenere l'orma rossa, un'ulteriore rotazione rispetto al punto viola e così via. Considerando la coppia formata da un'orma azzurra ed una rossa, si può invece notare una glissosimmetria.

3.3.7.

Questo è un fregio del tipo **pmm2**, ottenuto mediante rotazioni di 180° dell'orma rossa per ottenere la seconda orma rossa, opposta al centro di rotazione, ed una simmetria orizzontale rispetto all'asse passante tra i talloni delle orme, che da origine ad immagini di colore diverso. Si può notare anche una simmetria verticale tra le orme. Questa è una conseguenza della composizione di trasformazioni. Infatti, componendo due simmetrie assiali con assi perpendicolari, si ottiene una rotazione di angolo 180°. Traslando il primo gruppo di quattro orme, si ottiene poi l'intero fregio.

4. Frattali: accenni

4.1 Introduzione

Non sempre la natura agisce secondo isometrie. Si possono notare dei casi in cui la regolarità viene "rotta" seguendo precisi schemi. Si tratta dei frattali.

Il termine ***frattale*** fu coniato da Benoit Mandelbrot nel 1975 e deriva dal latino "fractus", cioè "rotto" o "spezzato", come il termine "frazione". Si noti che le immagini frattali sono considerate dalla matematica oggetti di dimensione frazionaria.

4.2 Definizioni e concetti matematici

Di seguito si proporranno due definizioni di frattale, ma bisogna ricordare che non ne esiste una unica. Esiste una grande varietà di oggetti che vengono definiti frattali ed ognuno ha caratteristiche proprie. Lo stesso Mandelbrot fornisce una definizione di frattale solo in modo molto approssimativo ed intuitivo.

Secondo la definizione più semplice e intuitiva un frattale è una figura geometrica in cui un motivo identico si ripete su scala continuamente ridotta. Questo significa che ingrandendo la figura si otterranno forme ricorrenti e ad ogni ingrandimento essa rivelerà nuovi dettagli. Contrariamente a qualsiasi altra figura geometrica un frattale invece di perdere dettagli quando è ingrandito, si arricchisce di nuovi particolari.

Volendo dare una definizione matematica dei frattali, bisogna ricorrere alle trasformazioni geometriche.

Si consideri un insieme di N trasformazioni (non necessariamente affini) del piano cartesiano: $\{ \boldsymbol{T}_1, \boldsymbol{T}_2, \boldsymbol{T}_3, \ldots, \boldsymbol{T}_N \}$ ed applichiamole allo stesso sottoinsieme **A** del piano. Come risultato otterremo una famiglia di N sottoinsiemi del piano cartesiano $\{ \boldsymbol{T}_1(\boldsymbol{A}), \boldsymbol{T}_2(\boldsymbol{A}), \boldsymbol{T}_3(\boldsymbol{A}), \ldots, \boldsymbol{T}_N(\boldsymbol{A}) \}$. Sia $\boldsymbol{A}_1$ l'insieme ottenuto come unione di questi sottoinsiemi. Applichiamo di nuovo le N trasformazioni all'insieme $\boldsymbol{A}_1$ così ottenuto e consideriamo l'unione degli N insiemi immagine. Chiamiamo questo insieme $\boldsymbol{A}_2$. Agiamo nello stesso modo su $\boldsymbol{A}_2$ e otteniamo $\boldsymbol{A}_3$.

Continuando allo stesso modo, otteniamo una successione di insiemi $\{ \boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, \boldsymbol{A}_3, \ldots \}$.

La domanda che molti studiosi si sono posti è se, continuando nello stesso modo, si possa "convergere" ad un insieme **A**, cioè se la successione si stabilizzerà e da un certo punto in poi, non si potranno più notare miglioramenti dell'immagine.

Sotto certe condizioni la successione di insiemi convergerà ad un insieme limite $\boldsymbol{F}$. Questo insieme limite $\boldsymbol{F}$ si definisce **frattale**, più precisamente **frattale *IFS*** (*Iterated Function System*) ovvero "frattale ottenuto iterando un insieme di trasformazioni del piano".

“*Perché la geometria è spesso descritta come fredda e asciutta? Una ragione sta nell’incapacità di descrivere la forma di una nuvola, di una montagna, del profilo di una costa o di un albero. Le nuvole non sono sfere, le montagne non sono coni, le coste non sono cerchi e la corteccia non è piana, né un fulmine viaggia su una linea retta.*”

Questa è la critica che nel libro *The Fractal Geometry of Nature* Manderlbrot rivolge alla geometria euclidea per la sua inadeguatezza nel descrivere la natura.

La natura infatti presenta molti esempi di forme simili ai frattali.

Cavolfiore

Quercia fotografata in inverno

L’esempio più evidente è quello della felce. Si può notare che il ramo rosso è una copia rimpicciolita dell’intera foglia, e lo stesso sono la parte blu per quella rossa e quella celeste per la blu.

Questa proprietà viene definita **autosomiglianza** o **autosimilarità**. La figura F è unione di copie di se stesso a scale differenti. In pratica una parte dell’oggetto è simile al tutto.

Questa è una delle proprietà che un frattale può godere. Compresa questa le proprietà sono quattro. Un frattale può godere di tutte queste o solo di alcune:

- **struttura fine**: rivela dettagli ad ogni ingrandimento;
- **irregolarità**: non si può descrivere come luogo di punti che soddisfano semplici condizioni geometriche o analitiche; la funzione è *ricorsiva* (una **definizione ricorsiva** di un insieme *A* si ha quando per definire *A* vengono elencati degli elementi di *A* e delle regole per costruire nuovi elementi di *A* a partire da elementi di *A*);
- **dimensione frattale**: sebbene possa essere rappresentato in uno spazio convenzionale a due o tre dimensioni, la sua dimensione non è necessariamente un intero; può essere una frazione, ma spesso anche un numero irrazionale.

La **dimensione frattale** è il numero che misura il grado di irregolarità e di interruzione di un oggetto, considerato in qualsiasi scala. Dipende strettamente dal numero di iterazioni al quale si sottopone la figura iniziale. La dimensione frattale differisce da quella **topologica** definita da Euclide. Ad esempio, la dimensione topologica di un punto è 0, di una retta 1, di un piano 2, di un solido 3. Per intenderci, mentre un solido "riempie" completamente lo spazio in cui si trova, una spugna, pur essendo tridimensionale, non occupa interamente lo spazio, perché la sua struttura presenta un'intricata serie di aree non occupate dal materiale di cui è composto. Di conseguenza si può immaginare che la sua dimensione sia strettamente maggiore di quella di un piano, ma strettamente inferiore di quella di un solido, dunque un valore tra due e tre: un valore frazionario.

Supponiamo di considerare un frattale in cui possiamo distinguere N copie autosimili. Ciascuna di queste copie si ottiene tramite un'omotetia di rapporto K. La **dimensione frattale D** viene definita nel seguente modo: $\mathbf{D = \log N / \log (1/K)}$

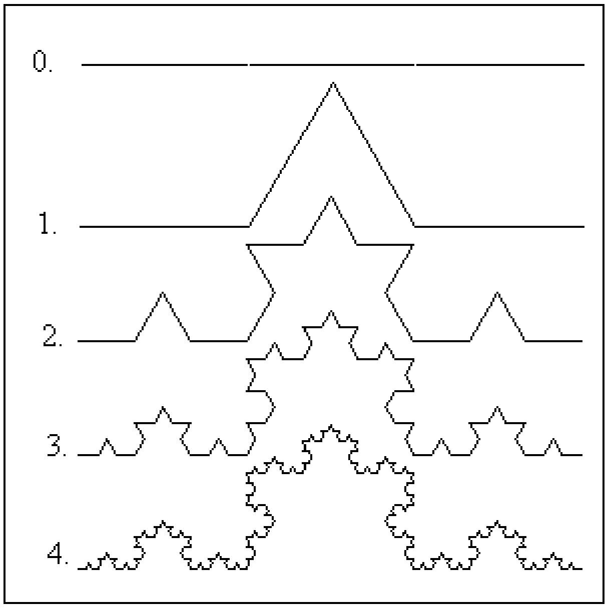
4.3 Le affinità: alla base dei frattali

Mentre rosoni e fregi sono ottenuti mediante isometrie, per la maggior parte dei frattali si ricorre alle trasformazioni affini.

Similitudine $S\begin{cases} x' = ax - by + p \\ y' = bx + ay + q \end{cases}$ Diretta $\det A = \begin{vmatrix} a & -b \\ b & a \end{vmatrix} = a^2 + b^2 > 0$ Determinante della matrice associata $S\begin{cases} x' = ax + by + p \\ y' = bx - ay + q \end{cases}$ Indiretta $\det A = \begin{vmatrix} a & b \\ b & -a \end{vmatrix} = -a^2 - b^2 < 0$ Determinante della matrice associata	- Una **similitudine** è una trasformazione che mantiene costante il rapporto tra segmenti corrispondenti. Se $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ sono due segmenti ($\overline{A'B'}$ e $\overline{C'D'}$ sono i loro corrispondenti) allora $\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{C'D'}}{\overline{CD}} = k$. - Il rapporto costante tra elementi corrispondenti è detto **rapporto di similitudine**, si indica con k ed è uguale a $k = \sqrt{\lvert\det A\rvert}$ - Se vi sono due figure corrispondenti allora il rapporto tra i loro perimetri è k: $2p(F') = k \cdot 2p(F)$ e il rapporto tra le loro aree è k^2 quindi $S(F') = k^2 \cdot S(F)$ - Le similitudini (esclusi i casi particolari di identità e traslazione) hanno un solo punto unito.

Omotetia $\omega_O \begin{cases} x' = kx \\ y' = ky \end{cases} \quad \omega_O^{-1} \begin{cases} x' = \frac{1}{k} x \\ y' = \frac{1}{k} y \end{cases}$ Se il centro è C($x;y$): $\omega_C \begin{cases} x' = k(x - x_0) + x_0 \\ y' = k(y - y_0) + y_0 \end{cases}$ oppure $\omega_C \begin{cases} x' = kx + p \\ y' = ky + q \end{cases}$	- Dato un punto *C* del piano si dice **omotetia** di centro *C* e rapporto *k* la trasformazione che al punto *P* fa corrispondere il punto *P'* in modo tale che *C, P, P'* siano allineati e $\overline{CP'} = k\overline{CP}$. Se $k>0$ allora *P'* appartiene alla semiretta *CP,* se $k<0$ allora *P'* appartiene alla semiretta opposta. - Se $k = 1$ è l'identità. - L'unico punto unito è il centro C. (*Se* $k \neq 1$) - Tutte le rette passanti per *C* sono rette unite. (Se $k \neq 1$)
Dilatazione e contrazione $\delta_x \begin{cases} x' = kx \\ y' = y \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ det$A$=k Lungo l'asse x – orizzontale $\delta_y \begin{cases} x' = x \\ y' = ky \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$ det$A$=k Lungo l'asse y – verticale $\delta \begin{cases} x' = hx + p \\ y' = ky + q \end{cases}$ con $h, k \neq 0$	- Assegnati due numeri reali *h* e *k* non entrambi nulli, si dice **dilatazione** con centro nell'origine e di rapporti *h* e *k* e si indica con il simbolo $\delta_{h\,;\,k}$ quella trasformazione che associa a un generico punto *P(x,y)* il punto *P'(hx',ky')* - L'inversa di una dilatazione è la dilatazione i cui rapporti sono i reciproci della dilatazione data. - Se $\|k\| > 1$, la trasformazione è una dilatazione. - Se $\|k\| < 1$, è una **contrazione**.
Affinità $\begin{cases} x' = ax + by + p \\ y' = cx + dy + q \end{cases}$	- Si chiama **affinità** ogni trasformazione del piano che associa al punto *P(x,y)* il punto *P'(x',y')* le cui coordinate si determinano mediante le equazioni a lato, se e solo se risulta $\det A \neq 0$, dove A è la matrice associata: $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Quindi D=det A = ad - bc $\neq 0$ - Rapporto tra aree di figure corrispondenti $\frac{S(F')}{S(F)} = D$ - Una affinità è **diretta** se $\det A > 0$; in questo caso dato un poligono e il suo trasformato l'orientazione dei vertici rimane la stessa. - Una affinità è **indiretta** se $\det A < 0$, in questo caso dato un poligono nel trasformato cambia l'orientazione dei vertici (esempio simmetria assiale). - L'inversa si trova ricavando *x* e *y* in funzione di *x'* e *y'* (per risolvere il sistema si può utilizzare il metodo di Cramer).

4.4 Esempio



Osserviamo ora il più famoso dei frattali: **il merletto di Koch**.

Il matematico H. Von Koch introdusse questo merletto in un articolo nel 1904, quando l'attuale concetto di frattale non era ancora stato introdotto. All'epoca fu quindi considerato una curva dalle proprietà curiose.

- Si parte da un segmento, considerato nell'intervallo [0;1].
- Si divide l'intervallo in tre parti e si sostituisce quella centrale con due lati di un triangolo, congruenti ad ognuna delle parti.
- La stessa costruzione si ripete per ognuno dei quattro segmenti formati con il processo precedente.
- La lunghezza della curva, al crescere del numero delle iterazioni tende a diventare infinita, mentre l'area racchiusa tende ad un valore finito.

Per ottenere il merletto di Koch usando le affinità basta usare le seguenti quattro trasformazioni:

$$T_1 : \begin{cases} x' = \frac{1}{3}x \\ y' = \frac{1}{3}y \end{cases}$$

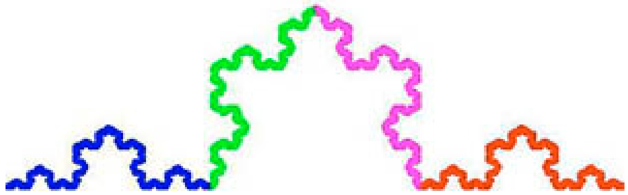
$$T_2 : \begin{cases} x' = \frac{1}{6}x - \frac{\sqrt{3}}{6}y + \frac{1}{3} \\ y' = \frac{\sqrt{3}}{6}x + \frac{1}{6}y \end{cases}$$

$$T_3 : \begin{cases} x' = \frac{1}{6}x + \frac{\sqrt{3}}{6}y + \frac{1}{2} \\ y' = -\frac{\sqrt{3}}{6}x + \frac{1}{6}y + \frac{\sqrt{3}}{6} \end{cases}$$

$$T_4 : \begin{cases} x' = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3} \\ y' = \frac{1}{3}y \end{cases}$$

L'origine del sistema di riferimento è posto nel vertice in basso a sinistra della figura di partenza. $\boldsymbol{T_1}$ è un'omotetia di ragione k = 1/3. $\boldsymbol{T_2}$ è un'omotetia con k =1/3 composta con una rotazione di 60° in senso antiorario ed una traslazione secondo il vettore (1/3,0). $\boldsymbol{T_3}$ è un'omotetia con k = 1/3 composta con una rotazione di 300° ed una traslazione secondo il vettore (2/3, 0). Infine T_4 è un'omotetia con $k = 1/3$ composta con una traslazione secondo il vettore (2/3,0).

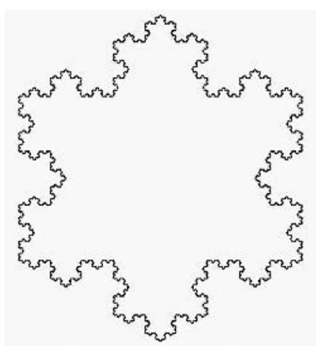
Per calcolare la **dimensione frattale** del merletto di Koch, si consideri $N = 4$ (poiché il merletto può essere diviso in quattro parti simili all'intero frattale) e $k = 1/3$ (il rapporto di omotetia visto sopra).



D=log 4 / log 3 = 1,262

Ad ogni iterazione la **lunghezza della curva** cresce di un fattore 4/3: se il segmento di partenza ha lunghezza pari a 1, il secondo misura 4/3, il terzo 16/9, il quarto 64/27 e così via. Questa successione è chiaramente divergente, cioè tende all'infinito.

Se si parte da un triangolo equilatero, si può giungere al "fiocco di neve".



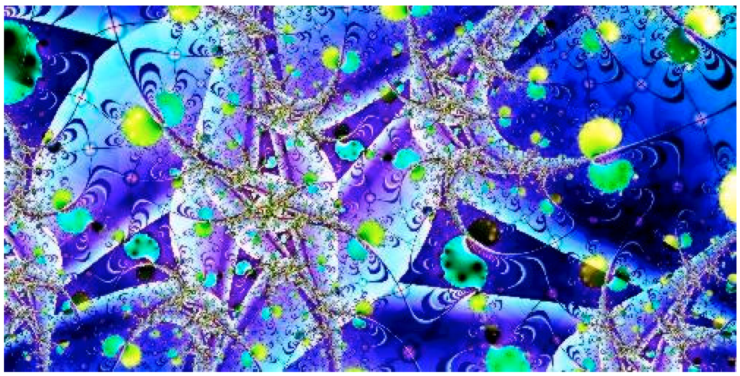
Alla luce di quanto abbiamo analizzato si possono dedurre alcune proprietà delle curve frattali:

- pur essendo continue, non ammettono una tangente unica in alcun punto;
- presi due punti della curva, anche vicinissimi fra loro, la distanza fra essi (misurata lungo la curva) è sempre infinita.

4.5 Applicazioni

La teoria dei frattali ha moltissime applicazioni nel mondo reale, alcune delle quali particolarmente sorprendenti come il loro utilizzo nella compressione di immagini. Inoltre spesso gli algoritmi che

generano i frattali producono delle immagini di grande bellezza estetica, tanto che è nato un nuovo genere d'arte detta appunto arte (e musica) frattale.
Sicuramente uno dei motivi del fascino di queste figure è che sono complesse, ma di una complessità che non ci disorienta: esse risultano in un certo senso familiari e decifrabili alla nostra mente. Il motivo di questo è che in realtà la loro complessità nasce da leggi molto semplici ed è in sostanza un dispiegarsi assai ridondante di un'iniziale idea elementare.



Fractal Mirò Blue - Roma - 1998
Esposto in "Amazing Seattle Fractals!",
Doug Harrington's FractalArts.com

5 Conclusione

Come affermò il matematico polacco Hugo Steinhaus, "La matematica è lo specchio della realtà e della vita". Da sola la simmetria è troppo rigida per spiegare tutte le regolarità della natura. In combinazione con altri concetti, quali il caos e la complessità, permette di riconoscere una gamma sorprendente di regolarità naturali, oltre a quelle che paiono essere irregolarità. A volte, qualcosa che pare casuale ha un ordine nascosto e la matematica è lo strumento mentale che usiamo per scoprire quale potrebbe essere tale ordine. Dunque per parlare di un rapporto tra natura e trasformazioni geometriche non era possibile limitarsi alle isometrie, ma è stata necessaria l'introduzione dei frattali, che con la semplicità dei calcoli alla loro base, forniscono una parziale risposta alla teoria del Caos. Lo stesso Mandelbrot aveva definito la geometria frattale come "la geometria del caos deterministico". Queste idee hanno aperto la matematica ad un nuovo metodo di osservazione della realtà e a importanti riflessioni filosofiche.

Bibliografia

- fogli di lavoro, scritti dalla professoressa A. Drei
- Wikipedia
- www.matematita.it
- www.miorelli.net/frattali/
- www.frattali.it
- http://www.comedareinumeri.net/incontro5/
- http://www.performancetrading.it/Documents/GfAnalisi/GfA_bDimensioneFrattale.htm
- http://www.dm.unito.it/~cerruti/Az1/frattali.html
- http://matematica.unibocconi.it/betti/simmetrie/simmetria05.htm
- http://digilander.libero.it/van_rib/mat_didat/frattali.pps
- http://www.batmath.it/matematica/a_cantor/pg4.htm
- http://tecalibri.altervista.org/S/STEWART-I_fiocco.htm
- http://www.webfract.it/