LE TRASFORMAZIONI GEOMETRICHE IN MUSICA

di

Federico Ballanti

1. INTRODUZIONE

Prima di analizzare il come poter applicare le trasformazioni geometriche ad un brano musicale è necessario introdurre come preliminare la struttura di un rigo musicale.

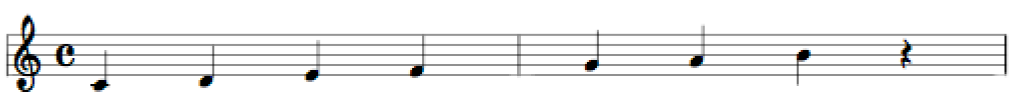
Il rigo musicale o pentagramma è formato da cinque linee parallele e dai quattro spazi situati tra esse. Si legge dal basso verso l'alto.

Sulle righe o negli spazi vengono posizionate le varie note.

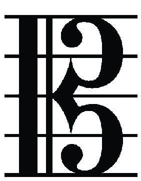
Il nome di una nota posizionata sul rigo dipende dalla chiave situata all'inizio di esso.

Le chiavi sono in totale sette e si dividono in:

- 4 chiavi di Do (indicano la posizione del Do sul rigo)
    - Prima linea → Chiave di soprano
    - Seconda linea → Chiave di mezzosoprano
    - Terza linea → Chiave di contralto
    - Quarta linea → Chiave di tenore
- 2 chiavi di Fa (indicano la posizione del Fa sul rigo)
    - Terza linea → Chiave di baritono
    - Quarta linea → Chiave di basso
- 1 chiave di Sol (indica la posizione del Sol sul rigo)
    - Seconda linea → Chiave di violino



Pentagramma


Chiave di Do

Chiave di Fa

Chiave di Sol

Dal punto di vista del tempo, l'unità di misura delle note è il quarto e i suoi multipli. Una nota viene rappresentata in modi diversi in base alla sua durata, e a ciascuna corrisponde anche il simbolo di una pausa della medesima durata. Una frazione posta dopo la chiave indica la somma totale di tempo che deve essere contenuta in una battuta (spazio di rigo delimitato da due barre verticali).

DURATA	NOTA	PAUSA
4/4 (o C) semibreve	𝅝	𝄻
2/4 minima	𝅗𝅥	𝄼
1/4 semiminima	♩	𝄽
1/8 croma	♪	𝄾
1/16 semicroma	𝅘𝅥𝅯	𝄿
1/32 biscroma	𝅘𝅥𝅰	𝅀
1/64 semibiscroma	𝅘𝅥𝅱	𝅁

N.B. Ponendo un punto dopo una nota essa viene allungata della metà della sua durata.

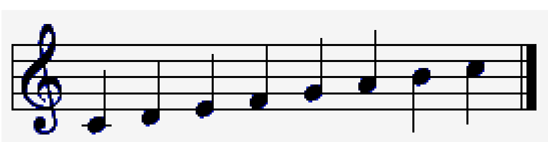
Per quanto riguarda le altezze l'unità di misura del sistema temperato moderno è il **semitono**.

Dal concetto di semitono deriva quello dell'**intervallo di ottava**: si definisce intervallo di ottava lo spazio che intercorre tra una nota e la prima nota successiva che porta il medesimo nome di quella di partenza. In un intervallo di ottava si trovano **dodici semitoni**. Partendo dal Do essi sono: Do, Do#/Re*b*, Re, Re#/Mi*b*, Mi, Fa, Fa#/Sol*b*, Sol, Sol#/La*b*, La, La#/Si*b*, Si (# = diesis, *b* = bemolle).

La successione dei 12 semitoni può essere espressa tramite una successione geometrica di ragione $2^{(1/12)}$.

$$a_n = a_1 * 2^{((n-1)/12)}$$

Dall'alternanza di toni (1 tono = 2 semitoni) e semitoni deriva il concetto di **scala musicale**. Esistono molti tipi di scale musicali ma ai fini di questa tesina risulta utile soltanto comprendere la struttura della **scala maggiore diatonica**. Si definisce **scala maggiore diatonica una successione di cinque toni e due semitoni così disposti: tono, tono, semitono, tono, tono, tono, semitono**. I suoni componenti questa scala risultano pertanto essere otto e **la prima e l'ultima nota della scala hanno lo stesso nome e distano tra loro di un'ottava**. La scala maggiore diatonica prende il nome dalla nota da cui si comincia a suonarla (es. scala di Do Maggiore, Re Maggiore ecc.) e tale nota viene chiamata **tonica**.

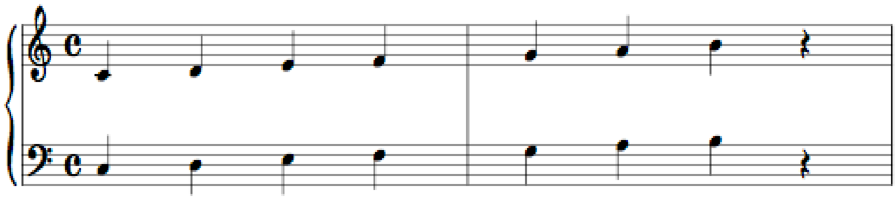


(scala di Do Maggiore diatonica)

La **tonalità** di un brano musicale si definisce in base alla scala su cui esso è costruito, e viene nominata in base alla tonica della scala utilizzata (es. tonalità di Do Maggiore). Ad ogni tonalità maggiore corrisponde anche una tonalità minore: essa si ottiene abbassando di tre semitoni (intervallo di terza minore) la tonica della scala utilizzata, e le note che la caratterizzano sono le stesse della scala maggiore di partenza (es. Do Maggiore – 3 semitoni = La minore).

Da tutto ciò si può intendere facilmente che le trasformazioni geometriche applicabili ad un pentagramma **per il tempo possono applicare solo coefficienti razionali, per le altezze solo coefficienti interi**.

In musica è molto frequente trovare il cosiddetto **doppio pentagramma**, quello utilizzato prettamente nelle partiture per organo e/o pianoforte. Esso è costituito da due righi musicali posti uno sotto l'altro e collegati da una parentesi graffa. Il rigo in alto è in Chiave di violino, quello in basso in Chiave di basso.

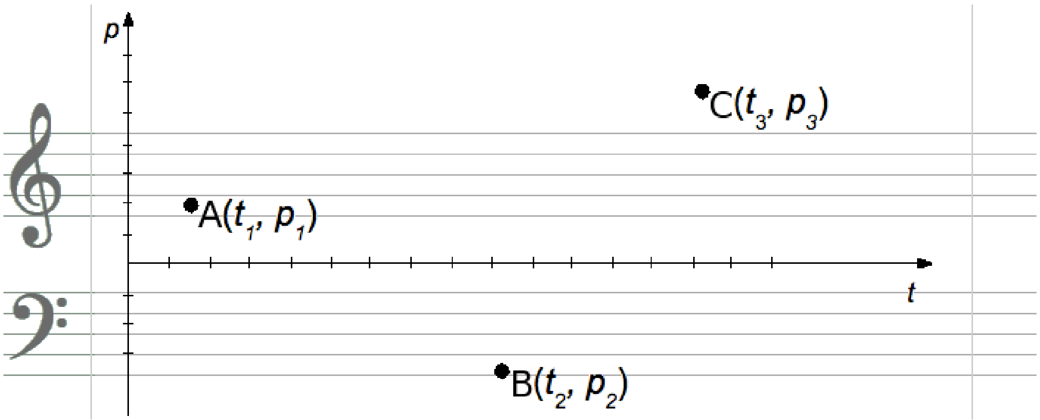


Doppio pentagramma

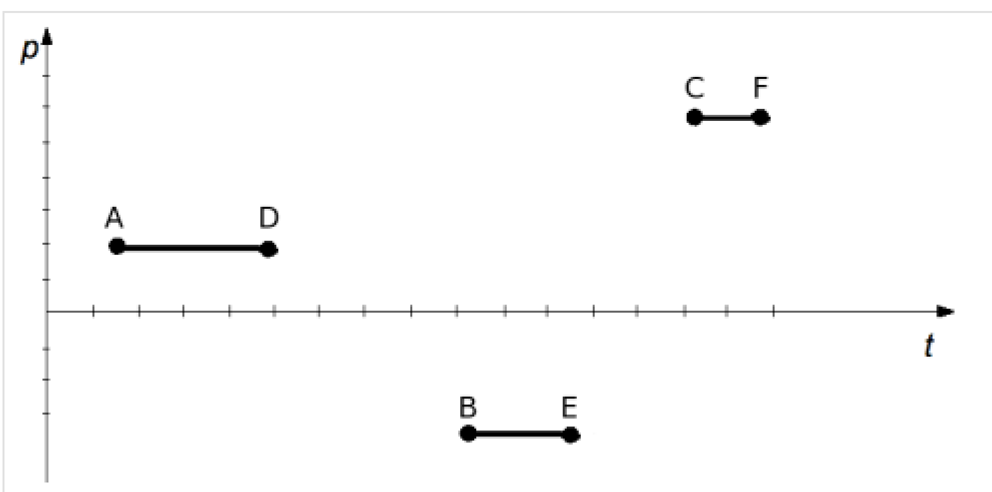
Questa disposizione è interessante in quanto permette di posizionare un Do esattamente a metà tra i due righi, il cosiddetto **Do centrale** (Do di terza ottava sulle tastiere).

Diventa perciò possibile trasferire il pentagramma nel piano cartesiano, posizionando l'asse delle ascisse lungo la linea del Do centrale.

L'asse delle ascisse diventa così quello del tempo, l'asse delle ordinate quello delle altezze e i punti del piano le varie note con la loro altezza e la loro lunghezza temporale.



Rappresentazione attraverso il punto di attacco e chiusura delle note:



Bisogna infine tenere bene a mente che le trasformazioni geometriche rispetto all'asse delle altezze **non si riferiscono ad una variazione di frequenza ma ad uno spostamento di un numero intero di semitoni lungo il rigo**.

2. TRASFORMAZIONI GEOMETRICHE

Si definisce **trasformazione geometrica del piano in sé** una **funzione *f*: $\mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ che porta punti del piano in punti del piano, e perciò passa da un punto *P*(*x*;*y*) ad un punto *P'*(*x'*;*y'*).**

In particolare le trasformazioni analizzate fanno parte del gruppo delle **affinità.** Questo tipo di trasformazioni viene espresso attraverso **due equazioni di primo grado** e gode di particolari proprietà dette **invarianti**:

- le rette vengono portate in rette
- le rette parallele vengono portate in rette parallele
- le parabole vengono portate in parabole
- le iperboli vengono portate in iperboli
- le ellissi vengono portate in ellissi

Un sottoinsieme delle affinità è l'insieme delle **similitudini**. Queste trasformazioni hanno la particolarità di mantenere costanti i rapporti tra i segmenti, portare le circonferenze in altre circonferenze e gli angoli in angoli congruenti.

A loro volta le similitudini contengono il sottoinsieme delle **isometrie**, la cui proprietà più importante è quella di **mantenere costanti le lunghezze e le estensioni delle superfici**.

Equazioni generiche di un' affinità:

$$\begin{cases} x' = f(x; y) \\ y' = g(x; y) \end{cases}$$

Ovvero:

$$\begin{cases} x' = ax + by + p \\ y' = cx + dy + q \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

N.B. Per esistere la trasformazione deve essere invertibile essendo una funzione biunivoca. Quindi per la regola di Cramer deve risultare valido $ad - bc \neq 0$.

Perché un'affinità sia un'isometria la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ deve essere **ortonormale** ovvero:

$$\begin{cases} a^2 + c^2 = 1 \\ b^2 + d^2 = 1 \\ ab - cd = 0 \\ ad - bc = \pm 1 \end{cases}$$

Per considerare l'applicazione delle trasformazioni al rigo musicale verrà utilizzata una melodia di riferimento su cui applicare di volta in volta le trasformazioni (tonalità Do Maggiore, 4/4 di tempo per battuta).

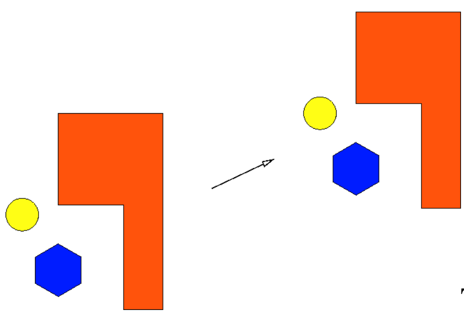
(N.B. Due note unite da una barra orizzontale come il La e il Sol di questa melodia corrispondono a due crome).

2.1 TRASLAZIONI

Una traslazione è un'isometria, quindi le distanze rimangono invariate. In ambito musicale le durate delle note rimangono invariate così come i rapporti intervallari tra esse.

Nel piano cartesiano una traslazione avviene rispetto ad un vettore $\vec{v}(a;b)$ e ha equazioni:

$$\tau_v \begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$$



Traslazione nel piano

Nell'ambito musicale si distinguono traslazioni rispetto all'asse del tempo *t* e rispetto all'asse delle altezze *p*.

Le traslazioni rispetto all'asse del tempo vengono chiamate **ritardi** o **anticipazioni** in base al verso in cui è diretto il vettore.

Consideriamo la seguente traslazione:

$$A(t_1, p_1); \qquad A' \begin{cases} t_1' = t_1 + \dfrac{1}{4} \\ p_1' = p_1 \end{cases}$$

Applicandola alla melodia di riferimento risulta:

Le traslazioni rispetto all'asse delle altezze vengono invece chiamate **trasposizioni**. Esse risultano utili per creare canti paralleli ("seconde voci") o per armonizzare una scala.
Consideriamo una traslazione discendente di tre semitoni:

$$A(t_1, p_1); \qquad A' \begin{cases} t_1' = t_1 \\ p_1' = p_1 - 3 \end{cases}$$

Ed applichiamola alla nostra melodia:

Il tipo di trasposizione qui applicata è detta **trasposizione cromatica** in quanto conserva l'esatta distanza in semitoni tra le note di partenza e quelle di arrivo. Pertanto la melodia di arrivo risulta in una tonalità diversa rispetto a quella di partenza.
La tonalità di partenza era Do Maggiore, e di conseguenza quella di arrivo sarà La Maggiore (3 semitoni sotto il Do).
Per conoscere la tonalità di arrivo di un brano musicale traslato di p_x basta quindi traslare la tonica della medesima quantità.

tonalità finale = tonalità originale + p_x

Le trasposizioni più frequenti sono però le **trasposizioni diatoniche**: esse non rispettano i reali intervalli fra le note, ma quelli della tonalità originale. Traslando la nostra melodia utilizzando una trasposizione diatonica si otterrà il seguente risultato.

(La tonalità è rimasta quella di Do Maggiore).

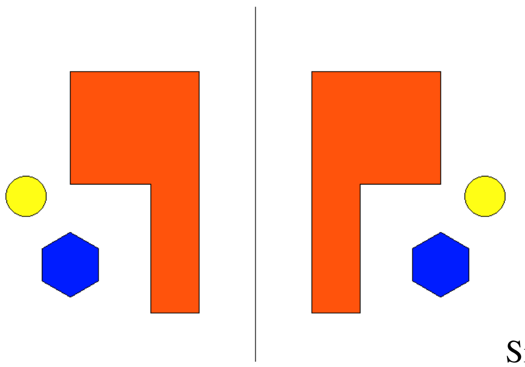
2.2 SIMMETRIE

Si distinguono due tipi di simmetrie: la **simmetria assiale** e la **simmetria centrale**.

2.2.1 LA SIMMETRIA ASSIALE

La simmetria assiale è un'isometria definita nel seguente modo:
Dato un punto *P* il simmetrico di *P* rispetto ad un asse r è il punto *P'* appartenente alla retta perpendicolare all'asse e passante per *P* e tale che, definito *H* il punto d'intersezione tra le due rette, $\overline{PH} = \overline{P'H}$.

Le equazioni della simmetria assiale variano in base all'asse di simmetria a cui ci si riferisce. Generalmente non si tende a ricavare l'equazione della simmetria assiale rispetto ad una generica retta $y = mx + q$ in quanto il procedimento risulterebbe molto complesso (è preferibile ricavare di volta in volta l'equazione specifica in base all'esercizio che si sta svolgendo).



Simmetria assiale rispetto ad una retta

Tuttavia sono facilmente memorizzabili le equazioni delle simmetrie assiali rispetto a rette specifiche come gli assi cartesiani o le bisettrici dei quadranti.
In particolare in questo contesto interessano le equazioni delle simmetrie assiali rispetto agli assi cartesiani.

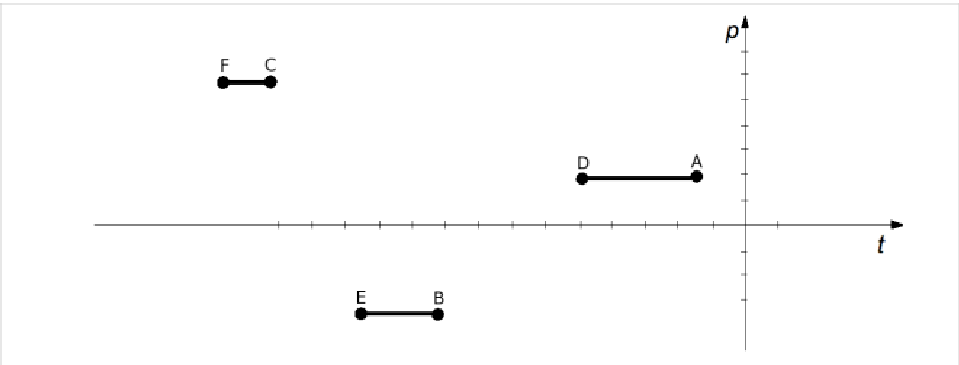
Equazioni della simmetria assiale rispetto all'asse delle ascisse:

$$\sigma_x \begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$$

Equazioni della simmetria assiale rispetto all'asse delle ordinate:

$$\sigma_y \begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases}$$

In musica le simmetrie rispetto all'asse temporale vengono chiamate **moto retrogrado**. Questo tipo di simmetria mantiene invariata la lunghezza delle note ma scambia i punti di attacco e chiusura.



(rif. figura a pag.5)

(rif. figura pag. 5)

La figura seguente mostra un moto retrogrado applicato alla melodia originale rispetto alla barra di separazione tra la prima e la seconda battuta.

$$A(t_1, p_1); \qquad A'\begin{cases} t_1' = -t_1 + 2 \\ p_1' = p_1 \end{cases}$$

Nell'equazione è stato necessario indicare anche una traslazione, poiché se l'asse di simmetria fosse stato l'origine del rigo musicale, la melodia avrebbe avuto tempi negativi, e ciò non è accettabile. La trasformazione applicata è quindi una **glissosimmetria** (composizione tra simmetria assiale e traslazione).

Le simmetrie rispetto all'asse delle altezze sono chiamate **inversioni melodiche**. La figura successiva mostra un esempio di inversione melodica rispetto al Fa situato sul primo spazio del rigo. L'equazione applicata è

$$A(t_1, p_1); \qquad A'\begin{cases} t_1' = t_1 \\ p_1' = -p_1 \end{cases}$$

dove le altezze *p* sono misurate rispetto al Fa di riferimento.

Come era successo con le traslazioni, anche qui la melodia di arrivo risulta in un'altra tonalità rispetto a quella di partenza. Purtroppo la regola per ricavare la tonalità di arrivo una volta effettuata l'inversione non è così immediata come quella delle trasposizioni, in quanto la tonalità di arrivo varia in base alla nota appartenente alla scala utilizzata attorno alla quale si svolge l'inversione.

La tabella seguente mostra la tonalità di arrivo in base a quale delle sette note della scala di riferimento viene effettuata l'inversione (le note non vengono considerate otto in quanto la prima e l'ultima hanno lo stesso nome). Una colonna mostra la nota rispetto alla quale avviene la riflessione, l'altra l'intervallo (ovvero la distanza) che intercorre tra la tonalità di partenza e quella di arrivo. L'intervallo cambia nome in base al numero di semitoni che implica al suo interno.

NOTA CENTRO DI RIFLESSIONE	DISTANZA ESPRESSA IN INTERVALLI ASCENDENTI RISPETTO ALLA NOTA DI

	RIFERIMENTO
Tonica (prima nota *o* primo grado)	Sesta minore (8 semitoni)
Sopratonica (secondo grado)	Stessa tonalità
Mediante (terzo grado)	Terza maggiore (4 semitoni)
Sottodominante (quarto grado)	Quinta diminuita (6 semitoni)
Dominante (quinto grado)	Settima minore (10 semitoni)
Sopradominante (sesto grado)	Seconda maggiore (2 semitoni)
Sensibile (settimo grado)	Quarta aumentata (6 semitoni)

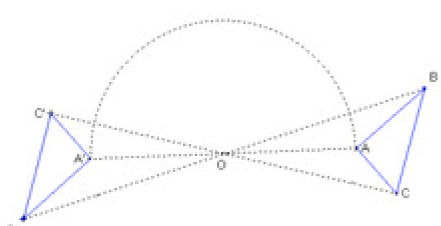
(L’intervallo di quinta diminuita e quello di quarta aumentata contengono lo stesso numero di semitoni, ma nel primo caso si considera l’intervallo di quinta “ristretto” di un semitono e nel secondo caso l’intervallo di quarta “allargato” di un semitono).

Tuttavia, come già detto per le traslazioni, anche l’inversione melodica può essere effettuata rispettando gli intervalli della tonalità di partenza. La figura seguente mostra un’inversione melodica diatonica rispetto al Fa sul primo spazio.

2.2.2 LA SIMMETRIA CENTRALE

La simmetria centrale, o rotazione di angolo $\alpha = \pi$, è anch’essa un’isometria. A differenza della simmetria assiale essa considera come centro di simmetria un punto *C* di coordinate $x_0;y_0$. Le equazioni della simmetria centrale si ricavano dalla formula inversa della regola del punto medio, in quanto si può considerare *C* come punto medio tra il punto di partenza $P(x;y)$ e quello di arrivo $P'(x';y')$.

$$\sigma_c \begin{cases} x' = 2x_0 - x \\ y' = 2y_0 - y \end{cases}$$



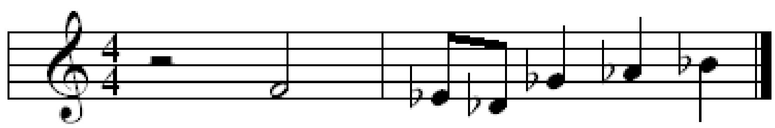
Simmetria centrale del triangolo *ABC* rispetto ad un punto *O*

La simmetria centrale risulta anche dalla composizione tra una simmetria assiale con asse parallelo all’asse delle ascisse ed una simmetria assiale con asse parallelo all’asse delle ordinate.

In ambito musicale la simmetria centrale consiste proprio in questo, nella composizione tra un moto retrogrado ed un'inversione melodica.

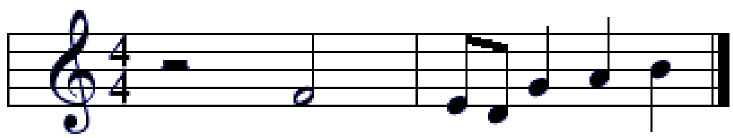
Consideriamo le due simmetrie assiali precedentemente applicate, componiamole, ed applichiamo la simmetria centrale risultante alla nostra melodia.

$$A(t_1, p_1); \begin{cases} t'_1 = -t_1 + 2 \\ p'_1 = -p_1 \end{cases}$$



Anche in questo caso la melodia finale non risulta nella tonalità di quella di partenza.

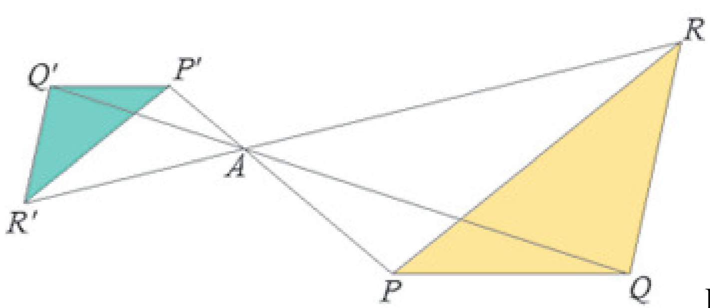
Nel caso si applicasse una simmetria centrale diatonica la melodia risultante sarà la seguente.



2.3 DILATAZIONI

Le dilatazioni non sono isometrie e considerate in generale non sono neanche similitudini in quanto non conservano le distanze e non mantengono costanti i rapporti tra le lunghezze dei segmenti.

Le dilatazioni operano attraverso moltiplicazioni delle coordinate dei punti del piano. Ogni punto del piano è soggetto a questa trasformazione a partire da un centro di dilatazione, generalmente considerato l'origine per comodità.



Dilatazione del triangolo *PQR* rispetto ad un centro *A*

Una dilatazione nel piano cartesiano di centro l'origine *O*(0;0) ha equazioni:

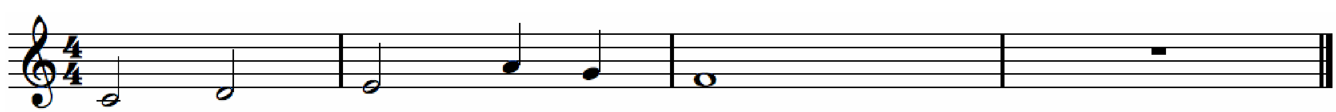
$$\omega_0 \begin{cases} x' = kx \\ y' = hy \end{cases}$$

Una dilatazione con generico centro *C* ha invece equazioni:

$$\omega_C \begin{cases} x' = kx + p \\ y' = hy + q \end{cases} \quad \text{con } C\left(\frac{p}{1-k}; \frac{q}{1-h}\right)$$

In ambito musicale, in base alle precedenti considerazioni, k può assumere solo valori razionali e h solo valori interi. In caso di k o h maggiori di 1 si parlerà di dilatazioni rispetto ad uno o all'altro asse, aumentando la distanza fra le note e le loro durate. Se k o h sono compresi tra 0 e 1 si avrà invece una contrazione, e le distanze e le durate delle note verranno ridotte. Se k e h hanno lo stesso valore la trasformazione diventa un'**omotetia**, ovvero una trasformazione appartenente all'insieme delle similitudini in quanto mantiene i rapporti tra i segmenti. Se k o h sono minori di 0 il verso dei punti verrà invertito mentre le durate, essendo valori assoluti, rimangono di segno positivo.
La dilatazione rispetto all'asse del tempo prende il nome di **aumentazione** se la durata delle note viene aumentata o **diminuzione** se viene diminuita.
Applichiamo alla nostra melodia un'aumentazione di fattore 2.

$$A(t_1, p_1); \qquad A' \begin{cases} t_1' = 2t_1 \\ p_1' = p_1 \end{cases}$$

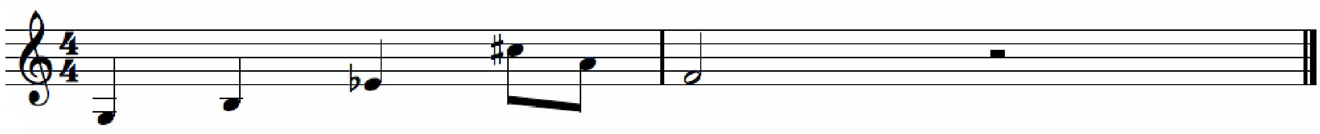


Applichiamo ora invece una diminuzione di fattore ½.

$$A(t_1, p_1); \qquad A' \begin{cases} t_1' = \dfrac{1}{2} t_1 \\ p_1' = p_1 \end{cases}$$

Le dilatazioni rispetto alle altezze portano generalmente ad una melodia finale **non tonale** (ovvero in nessuna tonalità specifica) e sono state utilizzate in campo compositivo soltanto recentemente.
La figura seguente mostra una dilatazione di fattore 2 rispetto al Fa situato nel primo spazio.

$$A(t_1, p_1); \qquad A' \begin{cases} t_1' = t_1 \\ p_1' = 2p_1 \end{cases}$$

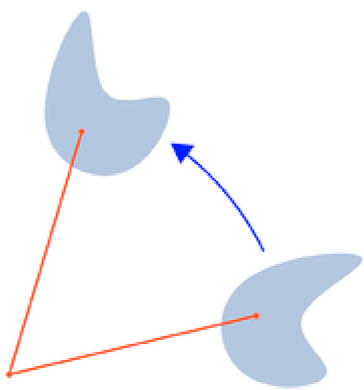


2.4 ROTAZIONI

Le rotazioni sono trasformazioni isometriche che avvengono in relazione ad un dato angolo α e ad un centro di rotazione.

Esse hanno equazioni

$$\begin{cases} x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha \\ y' = x\sin\alpha + y\cos\alpha \end{cases}$$ (N.B. come centro di rotazione viene considerato l'origine $O(0;0)$)



Esempio di rotazione di un certo angolo attorno ad un punto

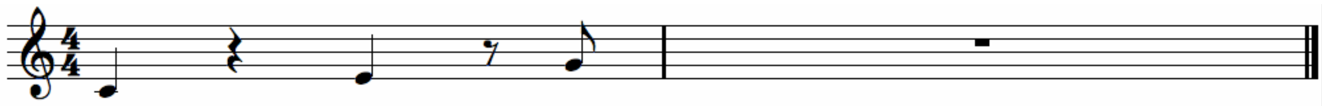
Poiché le operazioni di seno e coseno sono definite nel campo reale, esse portano generalmente a dei risultati non ammissibili nel piano cartesiano a cui ci riferiamo. Le uniche rotazioni possibili sono perciò quelle con angoli del tipo $k\pi$. Ma in caso di k dispari si avrebbe $\cos k\pi = -1$ e $\sin k\pi = 0$, e la trasformazione risulterebbe in una simmetria centrale e in caso di k pari si avrebbe $\cos k\pi = 1$ e $\sin k\pi = 0$, e la trasformazione risulterebbe in un'identità.

2.5 OPERAZIONI LOGICHE

Si compie una selezione logica su un rigo musicale quando vengono selezionate solo le note di un brano appartenenti ad una particolare classe di altezza. Per esempio si possono selezionare solo le note appartenenti all'accordo di Do Maggiore.

Un accordo maggiore si ottiene quando vengono suonate contemporaneamente la prima, la terza e la quinta nota della scala maggiore a cui l'accordo si riferisce. Nel caso del Do, l'accordo di Do Maggiore sarà formato dalle note (o **triade**) Do-Mi-Sol.

Applichiamo questa selezione alla nostra melodia, sostituendo le note che non prendiamo in considerazione con delle pause.



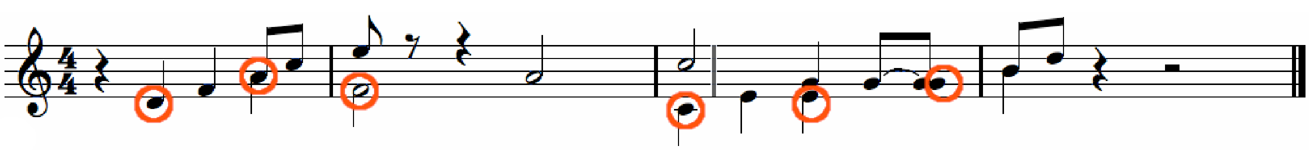
Nota sugli accordi: gli accordi maggiori sono caratterizzati dal fatto che tra la prima e la seconda nota dell'accordo intercorre un intervallo di terza maggiore (4 semitoni) e tra la seconda e la terza un intervallo di terza minore (3 semitoni). In una situazione opposta l'accordo sarebbe minore.

2.6 ALGORITMI COMBINATI

Eseguendo più operazioni simultaneamente (selezioni e trasformazioni) si possono raggiungere risultati originali.

Per esempio, consideriamo la nostra melodia di partenza e:

1) Selezioniamo le note della triade di Re minore (Re-Fa-La)
2) Trasliamo tutta la melodia di due battute e selezioniamo le note della triade di Do Maggiore (Do-Mi-Sol)
3) Applichiamo trasformazioni geometriche a questa sequenza per ottenere delle triadi arpeggiate (note di un accordo suonate in successione invece che contemporaneamente). Così le note verranno armonizzate nella successione prima-terza-quinta e il risultato sarà



(Le note cerchiate in rosso sono quelle della sequenza su cui sono state operate le trasformazioni).

Così nelle prime due battute si hanno arpeggiati nell'ordine l'accordo di Re minore (Re-Fa-La) e quello di La minore (La-Do-Mi) e nelle ultime due battute si hanno arpeggiati nell'ordine l'accordo di Do Maggiore (Do-Mi-Sol) e quello di Sol Maggiore (Sol-Si-Re).

(Le note sovrapposte vengono suonate contemporaneamente).

Naturalmente è possibile applicare un algoritmo anche solo ad una parte di un brano musicale senza necessariamente coinvolgerlo per intero.

3. UNO SGUARDO ALLA STORIA

Gli algoritmi matematici sono stati utilizzati ai fini di comporre musica, sia colta che popolare, sin dai tempi più antichi. Infatti per l'applicazione di un algoritmo ad un brano musicale può rivelarsi anche un processo "inconsapevole" che non implica particolari tipi di formalismi.

Già nell'Europa e nella Grecia Arcaica la musica veniva organizzata secondo strutture simultanee e organiche, creando canti a più voci organizzate in vari modi.

Con l'avvento del Cristianesimo si sviluppò in Europa fino alla metà dell'VIII secolo una forma di canto monodico (una sola linea melodica) caratterizzato da strutture diverse a seconda della regione di appartenenza. Si avviò poi un processo di unificazione del canto cristiano secondo le forme della liturgia romana ad opera dell'Imperatore Pipino il Breve, del figlio di Carlo Magno e del Papa Stefano II. Il primo a riunire tutti i canti sacri in un unico libro e a pretendere che in tutto l'Occidente venissero eseguite solo le melodie scelte dalla Chiesa di Roma durante le funzioni religiose era stato **Papa Gregorio I** (540-604) da cui questi canti presero il nome di **gregoriani**.

La prima forma di canto parallelo con voci distanziate da un intervallo di quarta o quinta risale al IX secolo e prende il nome di **Organum**. È questa la prima forma di trasformazione musicale codificata (per la precisione si trattava di una trasposizione), e fa parte del movimento dell'**Ars Antiqua**, ovvero i primi esempi di musica polifonica, inizialmente inscritti solo nell'ambiente religioso.

Nelle sue prime forme l'Organum prevedeva due sole voci: la melodia originale veniva chiamata **vox principalis** e quella traslata **vox organalis** (quest'ultima veniva generalmente improvvisata, ad intervalli di quarta o quinta). L'intervallo di ottava veniva utilizzato per necessità tecniche in caso di canto corale che prevedesse uomini, donne e bambini cantare insieme. Sempre in quel periodo si diffuse anche la tecnica della ripetizione di specifiche sezioni musicali.

La notazione allora utilizzata era detta **chironomica**, e consisteva in una serie di segni sul testo i quali rappresentavano l'andamento della melodia da intonare. Si dava più importanza all'aspetto espressivo in quanto si dovevano trasmettere concetti di tipo teologico.

Prese poi piede la scrittura **neumatica**, che cominciava ad indicare i rapporti ascendenti e discendenti in gruppi di due o tre note.

Le quindici scritture esistenti in tutta Europa furono infine raggruppate dalla scrittura **quadrata**.

Per varie ragioni storiche, cominciò poi a nascere l'esigenza di un modo preciso di scrivere le altezze delle note. Il primo tipo di scrittura musicale comprendente l'aspetto delle altezze fu la scrittura **diastematica**, la quale utilizzava due linee, una per il Do e una per il Fa.

Il monaco benedettino **Guido d'Arezzo** (995-1050) può essere tranquillamente definito il fondatore della moderna notazione musicale. Fu egli a definire il padre del pentagramma, ovvero il **tetragramma**, un rigo musicale formato da quattro linee e tre spazi con il Fa sulla terza linea.

Oltretutto egli si accorse che i versi dell'*Inno a San Giovanni* composto nell'ottavo secolo da Paolo Diacono cominciavano ciascuno con una nota diversa, e ciascuna nota era più alta di quella del verso che la precedeva. Perciò chiamò queste note con la sillaba che corrispondeva a ciascuna di esse all'interno dell'inno:

Ut *queant laxis*
Re*sonare fibris*
Mi*ra gestorum*
Fa*muli tuorum*
Sol*ve polluti*
La*bire atum*
San*cte Joannes*

Da queste sillabe derivarono poi i nomi delle moderne note musicali. A distanza di qualche secolo la nota Ut con cui comincia il brano fu rinominata Do. Il San dell'ultimo verso corrisponde nell'inno ad un altro Sol: la nota Si fu aggiunta in seguito e il nome fu dato dalle iniziali di Sancte Joannes (San Giovanni). I simboli delle note da quadrati diventarono prima romboidali e poi tondi ed infine al tetragramma si aggiunse una linea e nacque così il pentagramma. L'ultimo passo verso la notazione moderna si ebbe nel 1260 quando Francone di Colonia introdusse le figure di valore per indicare la durata delle note e delle pause.
Si potrebbe così dire che se nell'inno non vi fossero state le traslazioni ascendenti della prima nota all'inizio di ogni verso non sarebbe stato possibile giungere al moderno sistema di notazione musicale.
Con il mutare delle condizioni politiche i centri musicali non furono più solo i monasteri, ma anche le cattedrali delle grandi città. La scuola di musica più importante tra il 100 e il 200 era quella di **Notre Dame** a Parigi. In questa scuola si trovava il più antico ed importante compositore di Organa, il **Magister Leoninus**, la cui attività affiancata a quella del successore **Magister Perotinus** fu molto importante nell'ambito dell'Ars Antiqua. Le loro opere furono alla base dello sviluppo contrappuntistico a più voci. Nacquero così le forme del **Mottetto**, del **Rondellus** e del **Conductus**.
Il Mottetto era formato da tre voci: una grave, detta **tenor**, la quale eseguiva un canto detto fermo o dato generalmente proveniente dal repertorio gregoriano, e due voci superiori dette **duplum** (o **mottettus** o **cantus**) e **triplum** le quali cantavano un testo profano. È un genere prevalentemente vocale che comincia ad utilizzare, oltre al latino, anche le lingue volgari e il francese.

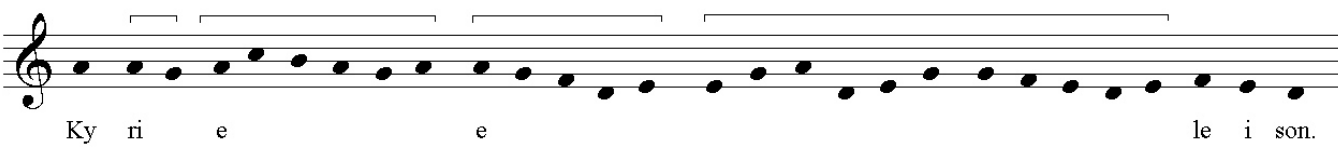
Il **Conductus** si differenzia dal Mottetto in quanto manca della linea gregoriana, le voci erano d'invenzione del compositore.

Il **Rondellus**, anch'esso a due o tre voci, era costituito da una sola linea melodica la quale passava tra le varie voci in una sorta di corsa a cerchio. È proprio questo andamento che dà al genere il nome Rondellus.

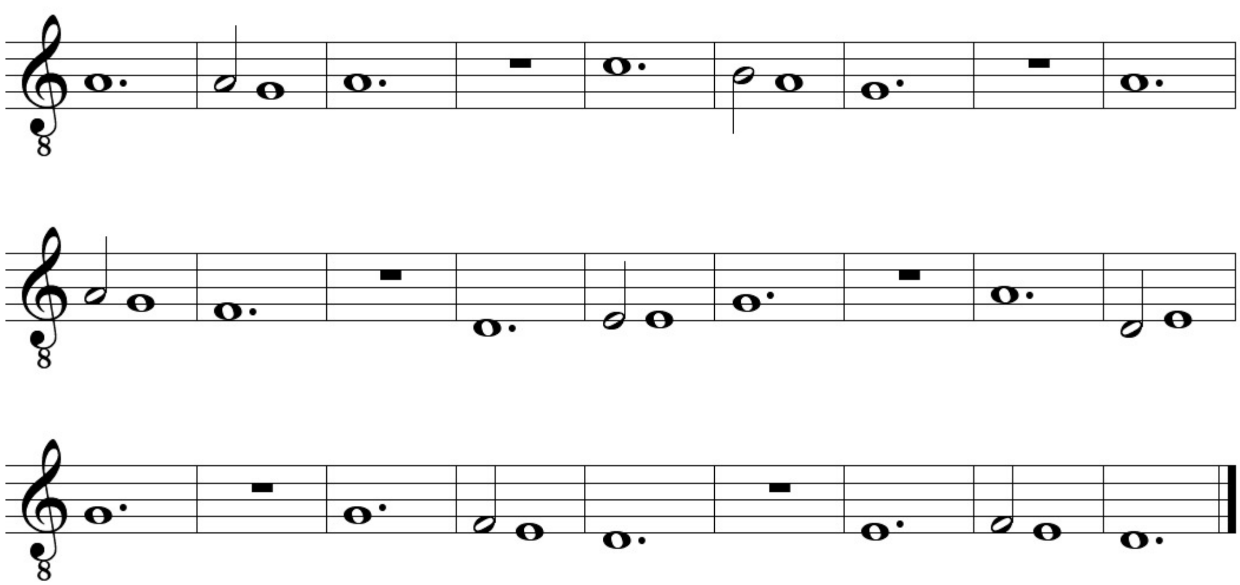
All'inizio del 300 nacque il movimento dell'**Ars Nova**, il quale affermava che la musica profana doveva avere la stessa bellezza e dignità di quella sacra. In questo periodo le opere polifoniche si portarono a livelli di complessità mai raggiunti prima. La personalità maggiore di questo movimento fu il francese **Guillaume de Machaut** (1300 ca.-1377), grande poeta, uomo politico e musicista.

Circa nel 1360 Machaut scrisse una Messa di cui verrà qui preso in analisi il Tenor della prima sezione del Kyrie. Esso è stato ottenuto con la tecnica utilizzata nel Mottetto, ovvero partendo da una melodia gregoriana a cui applicare trasformazioni musicali.

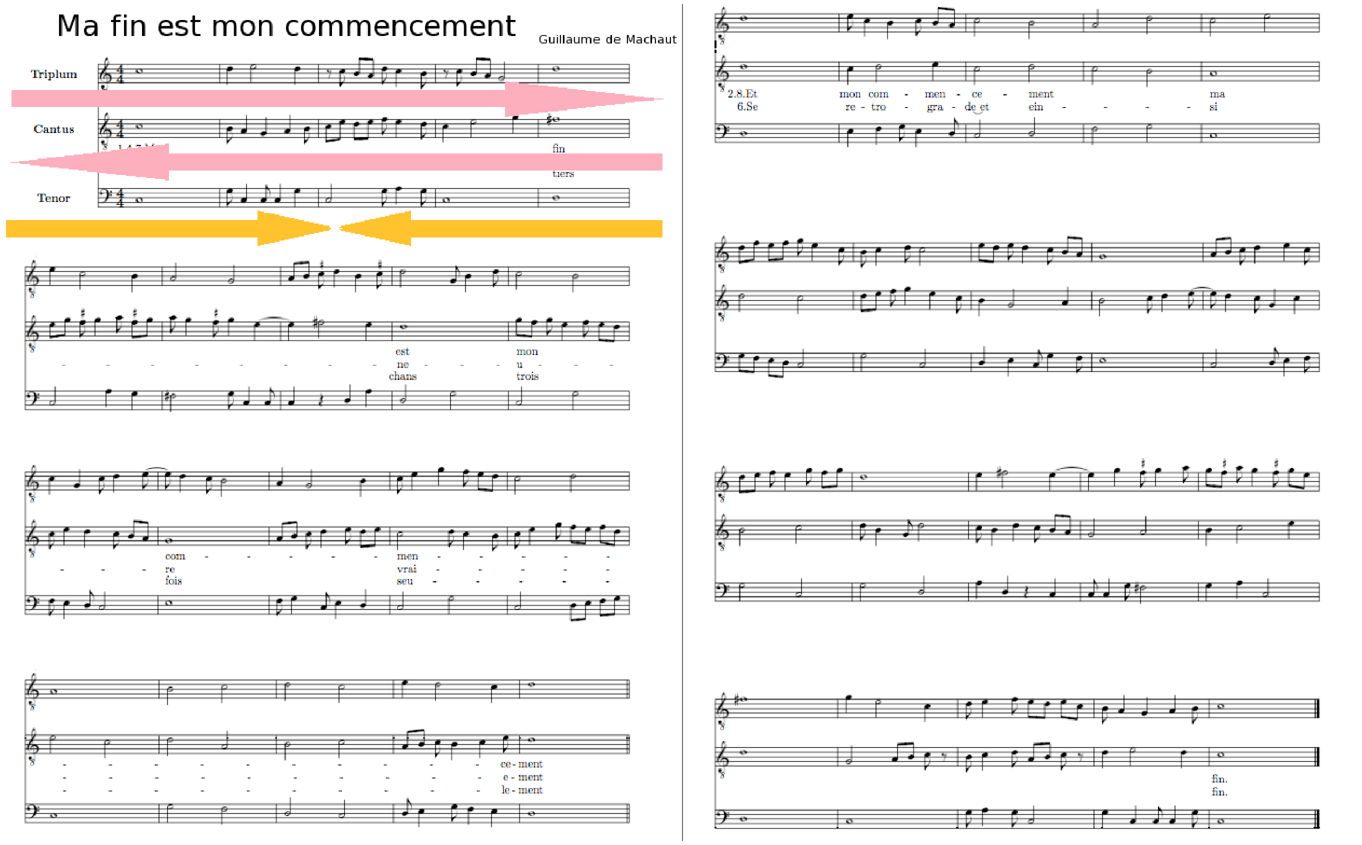
Qui sotto l'originale gregoriano, il primo verso del Kyrie Cunctipotens Genitor Deus:



Applicando aumentazioni e ritardi si ottiene la parte della prima sezione del Kyrie della Messa di Machaut destinata al Tenor:



Sempre di Machaut è l'opera a tre voci *Ma fin est mon commencement* (La mia fine è il mio inizio). La costruzione di questo brano è molto particolare in quanto il triplum esegue la stessa melodia del cantus in moto retrogrado, mentre il tenor esegue una melodia che finisce alla metà esatta del brano e viene poi riproposta in moto retrogrado nella seconda metà.



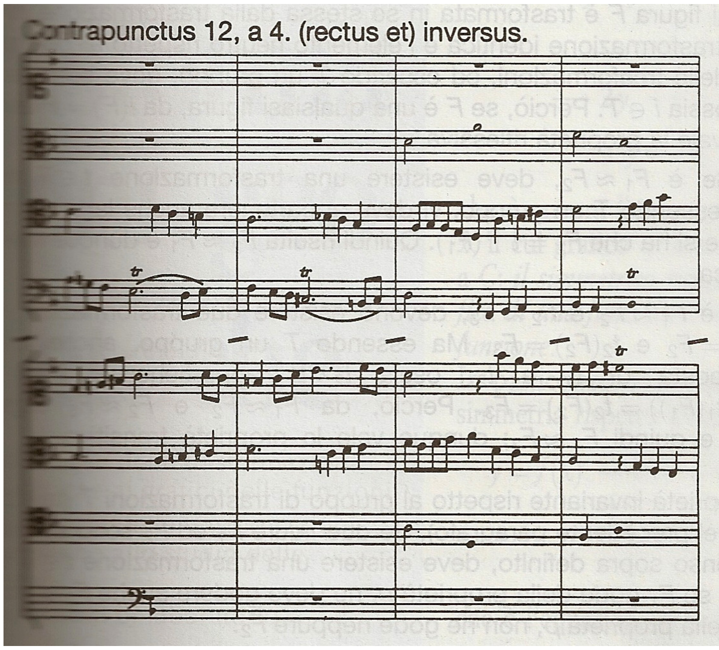
Un autore successivo, **Guillame Dufay**, costruì vere e proprie architetture musicali. È stato rilevato che le proporzioni da lui utilizzate per il mottetto *Nuper rosarum flores* sono le stesse utilizzate nella Cattedrale di Santa Maria del Fiore a Firenze, mentre in altre opere Dufay fece ricorso alla sezione aurea.

L'utilizzo delle tecniche compositive basate sulle simmetrie matematiche continuò per tutto il Rinascimento e per tutto il Barocco, periodi in cui nacquero i generi detti **invenzione**, **canone**, **variazione** e **fuga**. Il materiale musicale può essere sottoposto a tutte le trasformazioni precedentemente descritte.

L'aspetto musicale del Barocco si può concentrare in un nome solo: **Johann Sebastian Bach** (1685-1750). Bach fu un sostenitore della tecnica che permetteva di traslare una stessa melodia in tonalità diverse mantenendo costanti i rapporti fra le note.

Opera da segnalare è la BWV 1080, *L'arte della fuga*, in cui Bach applica tecniche interpretabili mediante le trasformazioni geometriche.

La figura seguente mostra alcune battute dei due brani *Contrapunctus 12 (rectus et inversus*) in cui le partiture dei due brani sono simmetriche rispetto ad un asse orizzontale passante tra il terzo e il quarto rigo.



(Contrapunctus 12 rectus et inversus)

Nel *Contrapunctus 5* il terzo rigo si ottiene tramite una glissosimmetria (simmetria assiale e successiva traslazione) del primo rigo.

(Contrapunctus 5)

Infine nel *Canon per Angmentationem in Contrario Motu* il secondo rigo si ottiene dal primo rigo mediante, nell'ordine: una simmetria assiale rispetto ad un asse orizzontale, un ritardo ed un'aumentazione di rapporto 2.

4. “PENSIERI E PAROLE”: CASO ITALIANO DI APPLICAZIONE DELLE TRASFORMAZIONI GEOMETRICHE ALLA MUSICA

Per concludere questa tesina, analizzeremo ora un intero brano nel quale è molto evidente l’applicazione delle traslazioni.

“Pensieri e parole/Insieme a te sto bene” è il decimo singolo da interprete di Lucio Battisti, scritto dallo stesso Battisti e da Mogol. Esso è uscito nell’Aprile 1971, per la casa discografica Dischi Ricordi. Essa rimase prima nella classifica dei singoli più venduti per tre mesi, dall’inizio di Giugno all’inizio di Settembre 1971, e risultò perciò il singolo più venduto dell’anno, tanto che Lelio Luttazzi, allora conduttore della trasmissione Hit Parade, la definì la regina della trasmissione stessa.

Sostanzialmente, “Pensieri e parole” è basata sulla ripetizione di pochi motivi di base (2 o 3) traslati e ripetuti: ciò che in campo artistico verrebbe definito come un fregio. (N.B. tutte le trasformazioni musicali d’ora in poi considerate sono di tipo diatonico).

Consideriamo i primi versi del brano:

Che ne sai di un bambino che rubava
E soltanto nel buio giocava
E del sole che trafigge i solai che ne sai?

Questo primo movimento è in tonalità di La minore. Analizziamo ora i versi successivi.

E di un mondo tutto chiuso in una via
E di un cinema di periferia
Che ne sai della nostra ferrovia che ne sai

Se si trascurano le differenti durate delle note a causa della divisione in sillabe dei versi, si può notare che le prime due battute di questa sezione corrispondono alle prime due battute della prima sezione traslate di 5 semitoni in senso ascendente. La tonalità di arrivo risulta perciò essere Re minore.

$$\tau\begin{cases} x' = x \\ y' = y + 5 \end{cases}$$

La terza battuta corrisponde invece alla rispettiva battuta del primo movimento a cui è stata applicata oltre la traslazione prima citata anche una simmetria assiale rispetto al primo spazio.

$$\sigma \circ \tau\begin{cases} x' = x \\ y' = -y - 5 \end{cases}$$

L'ultima nota è invece la risultante di una simmetria assiale rispetto al Re situato sotto la prima linea oppure di una traslazione di quattro semitoni in senso ascendente.

La canzone prosegue con i seguenti versi in La minore:

Conosci me la mia lealtà

Tu sai che oggi morirei per onestà

Applicando la stessa traslazione di prima a queste battute otteniamo i due versi successivi (in Re minore):

Conosci me il nome mio
Tu sola sai se è vero o no che credo in Dio

Le ultime tre note della penultima battuta risultano traslate non più di 5 semitoni ma di 4. Inoltre la nota conclusiva risulta essere traslata di 3 semitoni in senso ascendente ed aumentata di un fattore 2. Per essa vale perciò la trasformazione:

$$\omega \circ \tau \begin{cases} x' = 2x \\ y' = y + 3 \end{cases}$$

La parte successiva della canzone risulta dalla sovrapposizione, traslazione e ripetizione di ciò che è stato finora visto:

Che ne sai tu di un campo di grano
Poesia di un amore profano
La paura di esser preso per mano che ne sai
L'amore mio (che ne sai di un ragazzo per bene)
È roccia ormai (che mostrava tutte quante le sue pene)
E sfida il tempo e sfida il vento e tu lo sai sì tu lo sai (la mia sincerità per rubare la sua verginità che ne sai)

Le ultime note dei versi considerati escono dallo schema finora seguito (notiamo infatti la presenza di Do diesis) e fungono da introduzione per la parte seguente, probabilmente la più suggestiva e complicata di tutto il brano.

Davanti a me c'è un'altra vita
La nostra è già finita
E nuove notti
E nuovi giorni
Cara vai o torni con me

La melodia corrispondente a "*c'è un'altra vita*" è la stessa che si ritrova poi modificata in "*è già finita*", "*e nuove notti*", "*e nuovi giorni*".

In "*è già finita*" ritroviamo la medesima sequenza di note traslata di 2 semitoni in senso discendente e l'ultima nota subisce una diminuzione di fattore ½. (N.B. si tratta di una trasposizione diatonica).

$$\tau\begin{cases} x' = x \\ y' = y - 2 \end{cases} \qquad \omega \circ \tau \begin{cases} x' = \dfrac{1}{2}x \\ y' = y - 2 \end{cases}$$ (ultima nota)

"*E nuove notti*" si divide in due parti. Le prime tre note sono abbassate di 3 semitoni rispetto alla melodia di "*c'è un'altra vita*" e viene poi loro applicata una simmetria assiale rispetto al Re situato sotto la prima riga. Le ultime tre note sono invece abbassate di 2 semitoni e l'ultima subisce una diminuzione di fattore 2.

Le trasformazioni utilizzate sono perciò:

$$\sigma \circ \tau \begin{cases} x' = x \\ y' = -y + 3 \end{cases} \qquad \tau_1 \begin{cases} x' = x \\ y' = y - 2 \end{cases} \qquad \omega \circ \tau_1 \begin{cases} x' = \dfrac{1}{2}x \\ y' = y - 2 \end{cases}$$

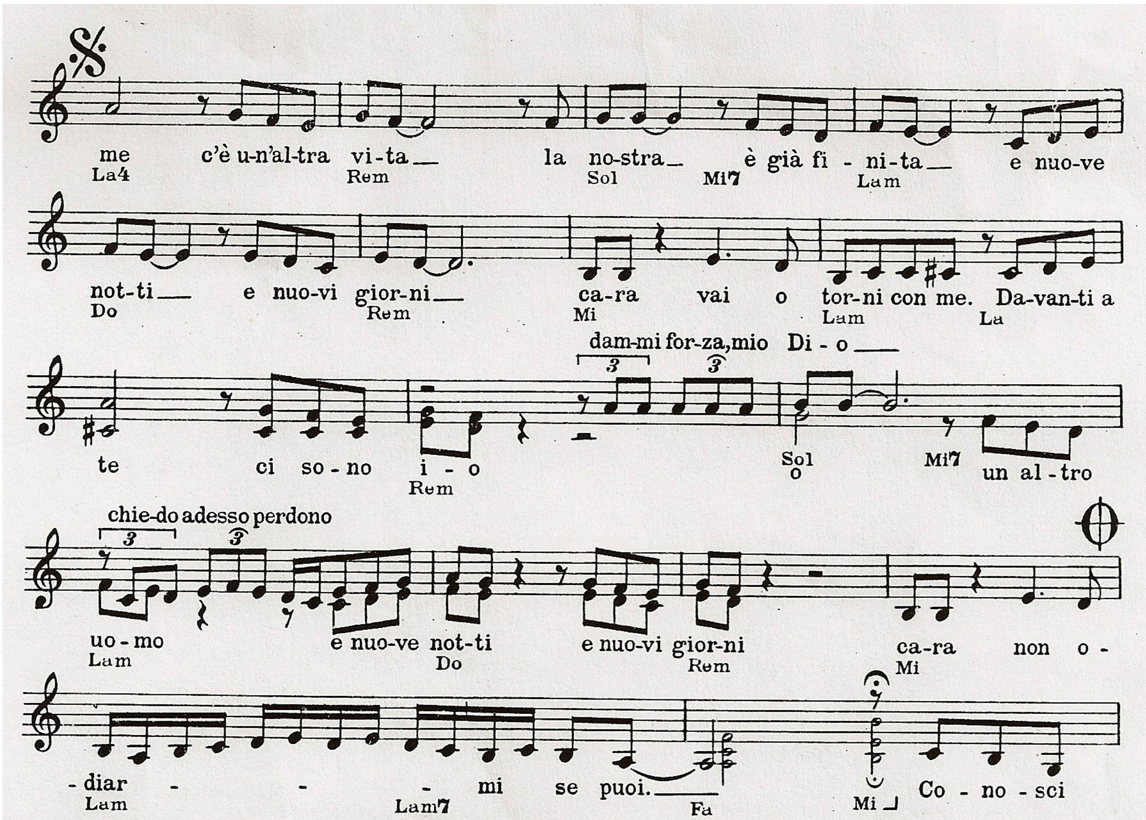
"*E nuovi giorni*" è caratterizzata invece dalla melodia di "*c'è un'altra vita*" abbassata di 3 semitoni e con l'ultima nota aumentata di un fattore 3/2.

$$\tau\begin{cases} x' = x \\ y' = y - 3 \end{cases} \qquad \omega \circ \tau \begin{cases} x' = \dfrac{3}{2}x \\ y' = y - 3 \end{cases}$$ (ultima nota)

La parte successiva del brano presenta la stessa melodia della parte appena analizzata a cui si aggiunge una seconda voce indipendente dalle trasformazioni e con delle note in aggiunta nell'ultimo verso.

Davanti a te ci sono io (dammi forza mio Dio)
Un altro uomo (chiedo adesso perdono)
E nuove notti
E nuovi giorni
Cara non odiarmi se puoi

Tutto assemblato risulta essere:



Il brano si conclude ripetendo nuovamente tutte le strutture finora analizzate con varie sovrapposizioni di più voci.

Conosci me (che ne sai di un viaggio in Inghilterra)

Quel che darei (che ne sai di un amore Israelita)

Perché negli altri ritrovassi gli occhi miei (di due occhi sbarrati che mi han detto bugiardo è finita)

Che ne sai di un ragazzo che ti amava

Che parlava e niente sapeva

Eppur quel che diceva chissà perché chissà adesso è verità (sì tu lo sai)

Davanti a me c'è un'altra vita

La nostra è già finita

E nuove notti

E nuovi giorni

Cara vai o torni con me

Davanti a te ci sono io (dammi forza mio Dio)

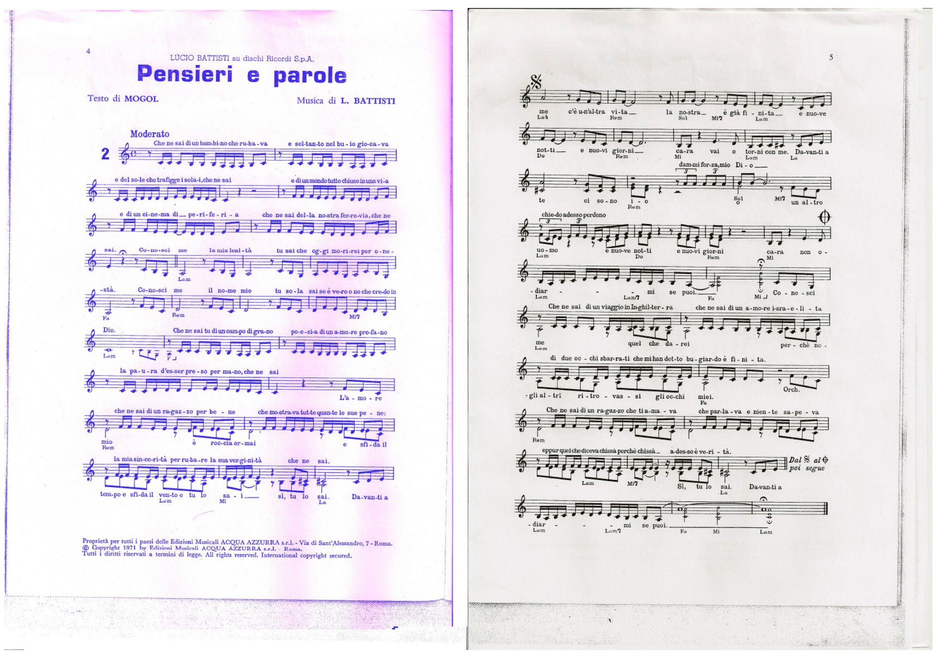
Un altro uomo (chiedo adesso perdono)

E nuove notti

E nuovi giorni

Cara non odiarmi se puoi

L'impostazione generale del brano è infine la seguente:



5. CONSIDERAZIONI

"La matematica è l'alfabeto col quale Dio ha scritto l'Universo" diceva Galileo. Ed è vero: tutto ciò che accade intorno a noi contiene in sé qualche legge matematica.

E per dimostrare ciò ho ritenuto che non potesse esservi argomento migliore di quello della musica.

La musica e il suono sono stati nostri compagni sin dall'inizio della nostra vita, quando ascoltavamo il ritmo dei battiti del cuore di nostra madre quando eravamo dentro di lei.

Quotidianamente entriamo a contatto con dei suoni di vario genere: il rombo di un motore, il canto di un uccello, lo sbattere di una porta…

Si potrebbe dire che la musica è nata con l'uomo: sin dalla notte dei tempi l'uomo ha sentito il bisogno di esprimere sentimenti ed emozioni attraverso i suoni, e le prime forme musicali si riferiscono appunto ai tentativi dell'uomo di imitare i suoni della natura.

Col tempo la tecnica si è raffinata e anche se ciò che distingue la "musica" dal "rumore" è un fattore puramente arbitrario, nella maggior parte dei casi questa differenza è basata sul fatto che i suoni siano armonizzati o no. Le regole dell'armonizzazione sono per l'appunto regole matematiche.

Ritorniamo così al punto da cui eravamo partiti.

Personalmente ritengo che in un mondo a cui ogni giorno si aggiunge un nuovo punto interrogativo la musica e le leggi matematiche sono due dei pochi pilastri rimasti saldi.

Perciò voglio concludere con quel ritornello semplice, chiaro e diretto che cantavano gli ABBA nel 1983:

Thank you for the music, the songs I'm singing
Thanks for all the joy they're bringing
Who can live without it, I ask in all honesty?
What would life be?
Without a song or a dance what are we?
So I say thank you for the music
For giving it to me!

(Traduzione:
Grazie per la musica, le canzoni che canto
Grazie per tutta la gioia che portano
Chi può farne a meno, chiedo in tutta onestà?
Cosa sarebbe la vita?
Cosa saremmo senza una canzone o un ballo?
Così io dico grazie per la musica,
Per averla data a me!)

Federico Ballanti

Bibliografia:

- “Nuovi elementi di Matematica Vol.A per il triennio dei Licei Scientifici sperimentali” di Dodero – Barboncini – Manfredi, Ghisetti&Corvi Editori
- http://musigen.unical.it/index.php/Didattica/matematica-e-musica.html
- “Le nuove canzoni di Lucio Battisti”, Edizioni Musicali ACQUA AZZURRA s.r.l.